# Autoreferat.

## 1 Imię i Nazwisko

Adam Chudecki

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/ artystyczne – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

1. **Magister Fizyki** – Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej, Politechnika Łódzka, 2002, tytuł rozprawy: *Przestrzeń fazowa układów kwantowych*, promotor: dr hab. Jaromir Tosiek
2. **Doktor Nauk Fizycznych** – Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej, Politechnika Łódzka, 2009, tytuł rozprawy: *Równania hiperniebiańskie Plebańskiego - Robinsona - Finleya w teorii względności. Analiza i zastosowania*, promotor: prof. dr hab. Maciej Przanowski

## 3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/ artystycznych

1. 2002–2004, asystent, Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej, Politechnika Łódzka
2. od 2004, asystent, Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki, Politechnika Łódzka

## 4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.)

### 4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego

Kongruencje strun zerowych i ich związek z symetriami w słabych i silnych przestrzeniach hiperniebiańskich.

### 4.2 Monotematyczny cykl publikacji

[H1] A. Chudecki, 2010, *Conformal Killing vectors in nonexpanding $\mathcal{HH}$-spaces with $\Lambda$*, Classical and Quantum Gravity **27**, 205004

[H2] A. Chudecki, 2012, *Classification of the Killing vectors in nonexpanding $\mathcal{HH}$-spaces with $\Lambda$*, Classical and Quantum Gravity **29**, 135010

[H3] A. Chudecki, 2013, *Homothetic Killing vectors in expanding $\mathcal{HH}$-spaces with $\Lambda$*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 10, No. 1, 1250077

[H4] A. Chudecki, 2014, *Null Killing vectors and geometry of null strings in Einstein Spaces*, General Relativity and Gravitation **46**, 1714



Adam Chudecki

[H5] A. Chudecki, 2017, *Classification of the traceless Ricci tensor in 4-dimensional pseudo-Riemannian spaces of neutral signature*, Acta Physica Polonica B, Vol. 48, No. 1, 53-74

[H6] A. Chudecki, 2017, *On some examples of para-Hermite and para-Kähler Einstein spaces with $\Lambda \neq 0$*, Journal of Geometry and Physics 112, 175–196

[H7] A. Chudecki, 2017, *On geometry of congruences of null strings in 4-dimensional complex and real pseudo-Riemannian spaces*, Journal of Mathematical Physics **58**, 112502

[H8] A. Chudecki, 2018, *Classification of complex and real vacuum spaces of the type $[N]\otimes[N]$*, Journal of Mathematical Physics **59**, 062503

## 4.3 Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

### 4.3.1 Wstęp

**Metody zespolone w ogólnej teorii względności**

Od momentu sformułowania przez Alberta Einsteina w 1915 r. ogólnej teorii względności (OTW) poszukiwano metod rozwiązywania równań pola grawitacyjnego. Wiele z tych metod opiera się na analizie zespolonej. Przykładami są: formalizm spinorowy [36, 40], formalizm tetrad zerowych [6] i formalizm twistorów [37]. W pracy [60] znaleziono nowe rozwiązania równań Maxwella drogą zespolonej transformacji współrzędnych. Metoda ta pozwoliła potem na znalezienie nowych czasoprzestrzeni ze znanych już metryk [7, 30]. E. Newman rozważał zespolone 4-wymiarowe przestrzenie, których metryki spełniają próżniowe równania Einsteina i których samodualna (SD) albo antysamodualna (ASD) część tensora Weyla znika [31, 32]. Przestrzenie takie nazwano *przestrzeniami niebiańskimi* (*$\mathcal{H}$-spaces*). J.F. Plebański pokazał [41], że w przestrzeniach niebiańskich równania Einsteina redukują się do jednego równania na funkcję holomorficzną czterech zmiennych, która całkowicie determinuje metrykę. Równanie to (nieliniowe równanie cząstkowe drugiego rzędu) zostało nazwane *równaniem niebiańskim*.

Zwrócono uwagę na technikę *cięć rzeczywistych*[1] przestrzeni zespolonych (szeroką klasę metryk otrzymano na drodze cięcia lorentzowskiego podwójnej metryki Kerra - Schilda). Cięcia lorentzowskie przestrzeni zespolonych wydawały się być doskonałych narzędziem do znajdywania nowych rozwiązań równań Einsteina i poświęcono im wiele prac [43,45,54,56,62]. Szczególnie ciekawa jest praca [56], w której K. Rózga zanalizował własności cięć rzeczywistych. Oczywiście technika cięć rzeczywistych przestrzeni zespolonych pozwala na znalezienie nie tylko przestrzeni lorentzowskich, ale także *przestrzeni riemannowskich*, wyposażonych w metrykę o sygnaturze $(++++)$, oraz *przestrzeni neutralnych* (zwanych również *ultrahiperbolicznymi*), wyposażonych w metrykę o sygnaturze $(++--)$.

Podstawowym wnioskiem sformułowanym w [56] był warunek konieczny istnienia cięcia lorentzowskiego: SD i ASD część tensora Weyla muszą być tego samego typu Petrova - Penrosa[2]. Przestrzenie niebiańskie są zatem dość "niewdzięcznym" obiektem do badania cięć lorentzowskich: jako przestrzenie typu $[-]\otimes[\text{any}]$ lub $[\text{any}]\otimes[-]$ dopuszczają jedynie cięcia lorentzowskie konforemnie płaskie.

**Przestrzenie hiperniebiańskie**

Fundamentalny postęp dokonał się w 1976 roku, kiedy to J.F. Plebański i I. Robinson zdefiniowali uogólnienie przestrzeni niebiańskich, tzw.: *przestrzenie hiperniebiańskie* [46, 47].

[1] Przez *cięcie rzeczywiste* przestrzeni zespolonej rozumiemy 4-wymiarową rzeczywistą podrozmaitość tej przestrzeni.

[2] W przestrzeniach zespolonych, neutralnych i riemannowskich SD i ASD część tensora Weyla są od siebie niezależne, dopuszczane są zatem "mieszane" typy. W przestrzeniach zespolonych i neutralnych obie części tensora Weyla mogą być dowolnego typu algebraicznego, pojawiają się zatem przestrzenie typu, np: $[\mathrm{II}]\otimes[\mathrm{N}]$. W przestrzeniach riemannowskich SD i ASD część tensora Weyla mogą być jedynie typów [I], [D] lub [−].



Adam Chudecki

**Definicja 4.1.** *Przestrzeń hiperniebiańska*[3] *ze stałą kosmologiczną* $\Lambda$ *($\mathcal{HH}$-space with $\Lambda$) to 4-wymiarowa zespolona przestrzeń wyposażona w holomorficzną metrykę spełniającą próżniowe równania Einsteina ze stałą kosmologiczną i taka, że SD (lub ASD) część tensora Weyla jest algebraicznie specjalna.*

Przestrzenie hiperniebiańskie są zatem przestrzeniami typu [deg] $\otimes$ [any] lub [any] $\otimes$ [deg]. Przyjmujemy dla ustalenia uwagi, że zdegenerowana jest część samodualna (SD) tensora Weyla. Używamy także skrótu *przestrzeń hiperniebiańska* zamiast *przestrzeń hiperniebiańska ze stałą kosmologiczną*. Niezwykłym wynikiem było wykazanie, że - podobnie jak w przypadku przestrzeni niebiańskich - próżniowe równania Einsteina ze stałą kosmologiczną w przestrzeniach hiperniebiańskich można zredukować do jednego nieliniowego równania cząstkowego drugiego rzędu na jedną funkcję holomorficzną, która całkowicie determinuje metrykę.

Istnieją dwa typy przestrzeni hiperniebiańskich. Pierwszy typ to tzw: *nieekspandujące przestrzenie hiperniebiańskie*. Metryka tych przestrzeni ma postać

$$ds^2 = 2\,(-dp^{\dot{A}}dq_{\dot{A}} + Q^{\dot{A}\dot{B}}\,dq_{\dot{A}}dq_{\dot{B}}),\ \ \dot{A},\dot{B} = \dot{1},\dot{2} \tag{IV.1}$$

gdzie $(q_{\dot{A}}, p_{\dot{B}})$ to współrzędne lokalne, a $Q^{\dot{A}\dot{B}}$ wyraża się wzorem

$$Q^{\dot{A}\dot{B}} = -\Theta_{p_{\dot{A}}p_{\dot{B}}} + \frac{2}{3}F^{(\dot{A}}p^{\dot{B})} + \frac{1}{3}\Lambda\, p^{\dot{A}}p^{\dot{B}} \tag{IV.2}$$

Holomorficzna funkcja $\Theta = \Theta(q_{\dot{A}}, p_{\dot{B}})$ nazywa się *funkcją kluczową* i spełnia *nieekspandujące równanie hiperniebiańskie z* $\Lambda$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Theta_{p_{\dot{A}}p_{\dot{B}}}\Theta_{p^{\dot{A}}p^{\dot{B}}} + \Theta_{p_{\dot{A}}q^{\dot{A}}} + F^{\dot{A}}\Big(\Theta_{p^{\dot{A}}} - \frac{2}{3}p^{\dot{B}}\,\Theta_{p^{\dot{A}}p^{\dot{B}}}\Big) + \frac{1}{18}\,(F^{\dot{A}}p_{\dot{A}})^2 \\ &+\frac{1}{6}\frac{\partial F_{\dot{A}}}{\partial q^{\dot{B}}}\,p^{\dot{A}}p^{\dot{B}} + \Lambda\Big(p^{\dot{A}}\Theta_{p^{\dot{A}}} - \Theta - \frac{1}{3}\,p^{\dot{A}}p^{\dot{B}}\Theta_{p^{\dot{A}}p^{\dot{B}}}\Big) = N_{\dot{A}}\,p^{\dot{A}} + \gamma\end{aligned} \tag{IV.3}$$

Funkcje $F^{\dot{A}}$, $N^{\dot{A}}$ i $\gamma$ to dowolne funkcje współrzędnych $q^{\dot{C}}$. Są one powiązane ze współczynnikami SD krzywizny konforemnej [5, 16].

Drugi typ przestrzeni hiperniebiańskich to tzw: *ekspandujące przestrzenie hiperniebiańskie*. Metryka takich przestrzeni ma postać

$$\begin{aligned}ds^2 = (\phi\tau)^{-2}\Big\{&2\tau(d\eta dw - d\phi dt) + 2\,\Big(-\tau^2\phi\,W_{\eta\eta} + \mu\phi^3 + \frac{\Lambda}{6}\Big)dt^2 \\ &+4\tau^2\,(W_\eta - \phi\,W_{\eta\phi})\,dwdt + 2\tau^2\,(2\,W_\phi - \phi\,W_{\phi\phi})\,dw^2\Big\}\end{aligned} \tag{IV.4}$$

Współrzędne $(\phi, \eta, w, t)$ nazywane są *współrzędnymi Plebańskiego - Robinsona - Finleya* (współrzędne PRF). Funkcja $W = W(\phi, \eta, w, t)$ również nazywana jest *funkcją kluczową*. Spełnia ona *ekspandujące równanie hiperniebiańskie z* $\Lambda$

$$\begin{aligned}&\tau^2\Big(W_{\eta\eta}W_{\phi\phi} - W_{\eta\phi}W_{\eta\phi} + 2\phi^{-1}W_\eta W_{\eta\phi} - 2\phi^{-1}W_\phi W_{\eta\eta}\Big) + \tau\phi^{-1}\Big(W_{w\eta} - W_{t\phi}\Big) \\ &-\mu\Big(\phi^2W_{\phi\phi} - 3\phi W_\phi + 3W\Big) + \frac{\eta}{2\tau}(\mu_t\eta - \mu_w\phi) - \frac{\Lambda}{6}\phi^{-1}W_{\phi\phi} = \frac{1}{2}\varkappa\phi - \frac{1}{2}\nu\eta + \gamma\end{aligned} \tag{IV.5}$$

Funkcje $\mu$, $\varkappa$, $\nu$ i $\gamma$ to dowolne funkcje współrzędnych $(w, t)$. Podobnie jak w przypadku nieekspandującym, wyrażają się przez nie współczynniki SD krzywizny konforemnej. $\tau$ to niezerowa stała.

Lorentzowskie cięcia przestrzeni hiperniebiańskich zawierają w sobie wszystkie próżniowe analityczne rozwiązania algebraicznie specjalne. Fakt, że równania Einsteina w przestrzeniach

[3] Poprzez analogię z nazewnictwem używanym w pracy [41], przestrzenie $\mathcal{HH}$ z $\Lambda = 0$ nazywa się również *silnymi przestrzeniami hiperniebiańskimi*.



Adam Chudecki

hiperniebiańskich zostały zredukowane do jednego równania dawał nadzieję na progres bardzo ambitnego programu badawczego zwanego *programem Penrosa - Plebańskiego*. Celem tego programu było znalezienie ogólnych technik otrzymywania cięć lorentzowskich przestrzeni zespolonych. Niestety, do chwili obecnej takich technik nie znaleziono. Nawet przykłady cięć lorentzowskich przestrzeni zespolonych dające znane w OTW metryki nie są liczne [4, 21]. Kilka z nich znaleziono w pracach [H3], [H4] i [H8].

W szczególności, J.F. Plebański, J.D. Finley, M. Przanowski i inni chcieli wykorzystać teorię przestrzeni hiperniebiańskich do znalezienia próżniowych rozwiązań typu [N] z twistem[4]. Typ [N] jest najbardziej zdegenerowany alegebraicznie ze wszystkich przestrzeni lorentzowskich niekonforemnie płaskich. Jest on niezwykle istotny w teorii fal grawitacyjnych, bowiem zgodnie z tzw. *Sachs peeling theorem* promieniowanie grawitacyjne daleko od źródła powinno być właśnie typu [N]. Wszystkie rozwiązania próżniowe typu [N] bez twistu zostały znalezione jawnie (pp-fale, klasa metryk Kundta), albo zredukowane do równania drugiego rzędu (klasa metryk Robinsona - Trautmana). Tylko jedno rozwiązanie próżniowych równań Einsteina typu [N] z twistem jest jawnie znane, jest to *rozwiązanie Hausera* [23, 24]. Niestety, wszystkie znane próżniowe rozwiązania typu [N] zawierają osobliwości, zatem żadne z nich nie może być modelem fal grawitacyjnych. Mimo wielu różnych podejść po problemu (np: [13, 14, 19] oraz [P1] i [P9]), wciąż jedynym znanym rozwiązaniem typu [N] z twistem pozostaje rozwiązanie Hausera.

Równania hiperniebańskie (IV.3) i (IV.5) są równaniami silnie nieliniowymi. Pożądane jest zatem zbadanie sposobów ich uproszczenia. Oczywistą metodą jest wyposażenie przestrzeni hiperniebiańskich w symetrie definiowane przez wektory Killinga bądź wektory homotetyczne[5]. Problemowi symetrii w przestrzeniach hiperniebiańskich poświęcone są w zasadzie jedynie dwie prace [42, 57]. Z kolei w pracach [15, 17] rozważano symetrie w przestrzeniach niebiańskich.

**Kongruencje strun zerowych**

Przestrzenie hiperniebiańskie są wyposażone w niezwykle interesującą strukturę geometryczną: *kongruencje strun zerowych* (*congruences of the null strings*) [44]. Kongruencja (zwana też *foliacją*) strun zerowych to rodzina zespolonych 2-wymiarowych powierzchni, z których każda jest całkowicie zerowa i całkowicie geodezyjna.

Rozważmy 2-wymiarową dystrybucję $\mathcal{D}$ zdefiniowaną w otwartym otoczeniu $U \in \mathcal{M}$ układem Pfaffa

$$m_A g^{A\dot{B}} = 0\ , \quad (g^{A\dot{B}}) := \sqrt{2}\begin{bmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{bmatrix}\ , \ A, B = 1, 2 \tag{IV.6}$$

gdzie $m_A$ to nigdzie nieznikające pole 1-indeksowych spinorów niekropkowanych, a $(e^1, e^2, e^3, e^4)$ to *tetrada zerowa*, czyli baza 1-form taka, że metryka przyjmuje postać $ds^2 = 2e^1e^2 + 2e^3e^4$. Dystrybucja $\mathcal{D}$ jest zatem rozpinana przez wektory $\{m_A a_{\dot{B}}, m_A b_{\dot{B}}\}$, $a_{\dot{B}} b^{\dot{B}} \neq 0$. Łatwo widać, że definiując 2-formę $\Sigma$ równaniem $\Sigma := (m_A g^{A\dot{1}}) \wedge (m_B g^{B\dot{2}})$, przyjmuje ona postać

$$\Sigma = m_A m_B S^{AB} \tag{IV.7}$$

gdzie $S^{AB}$ to baza 2-form SD:

$$(S^{AB}) := \begin{bmatrix} 2e^4 \wedge e^2 & e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \\ e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 & 2e^3 \wedge e^1 \end{bmatrix} \tag{IV.8}$$

Ponieważ $\Sigma$ jest 2-formą SD, mówimy, że dystrybucja $\mathcal{D}$ jest SD. Dystrybucja ta jest całkowalna w sensie Frobeniusa, jeśli spinor $m_A$ spełnia układ równań

$$m^A m^B \nabla_{A\dot{M}} m_B = 0 \tag{IV.9}$$

[4]Twist to jeden z parametrów opisujących optyczne własności kongruencji zerowych geodezyjnych.

[5]Stosujemy tu następujące nazewnictwo: wektor $K_a$ spełniający układ równań $\nabla_{(a}K_{b)} = \chi g_{ab}$ nazywamy *wektorem Killinga*, jeśli $\chi = 0$; *wektorem homotetycznym*, jeśli $\chi =$ const; *właściwym wektorem homotetycznym*, jeśli $\chi =$ const $\neq 0$; *właściwym wektorem konforemnym*, jeśli $\chi \neq$ const.



Adam Chudecki

Równania (IV.9) nazywane są *równaniami strun SD*, często mówimy również, że spinor $m_A$ *generuje kongruencję strun SD*, jeśli spełnia równania (IV.9). *Struny zerowe* to rozmaitości całkowe dystrybucji $\mathcal{D}$ a rodzina takich rozmaitości całkowych tworzy *kongruencję strun zerowych*. Każda powierzchnia tej rodziny jest całkowicie zerowa i całkowicie geodezyjna. [Analogicznie definiuje się kongruencje strun ASD].

Własności strun zerowych zbadano w pracach [48, 50, 55]. W szczególności, z równań (IV.9) wynika zależność

$$\nabla_{A\dot{M}} m_B = Z_{A\dot{M}} m_B + \in_{AB} M_{\dot{M}} \tag{IV.10}$$

gdzie $Z_{A\dot{M}}$ to *wektor Sommersa*, a $M_{\dot{M}}$ to *ekspansja kongruencji SD strun*. Ekspansja jest najważniejszą własnością kongruencji strun. Jeśli $M_{\dot{M}} = 0$ kongruencje nazywamy *nieekspandującą*, jeśli $M_{\dot{M}} \neq 0$, mamy doczynienia z kongruencją *ekspandującą*. Jeśli kongruencja jest nieekspandująca, oznacza to, że dystrybucja $\mathcal{D}$ jest *równolegle przenoszona*, czyli pochodna kowariantna $\nabla_Y X \in \mathcal{D}$ dla każdego wektora $X \in \mathcal{D}$ i dla każdego wektora $Y$.

Istnienie kongruencji SD (ASD) strun zerowych powiązane zostało z algebraiczną degeneracją SD (ASD) części tensora Weyla. Mówi o tym *zespolone twierdzenie Goldberga - Sachsa* [44, 52].

**Twierdzenie 4.2** (Plebański, Hacyan, [44]). *W zespolonej przestrzeni Einsteina poniższe stwierdzenia są równoważne*

- *przestrzeń dopuszcza kongruencję SD strun zerowych generowanych przez spinor* $m^A$
- *SD spinor Weyla jest algebraicznie zdegenerowany a* $m^A$ *jest wielokrotnym spinorem Penrosa*

■

Przestrzenie hiperniebiańskie (nie)ekspandujące wyposażone są w (nie)ekspandującą kongruencję strun zerowych. Zgodnie z zespolonym twierdzeniem Goldberga - Sachsa ilość różnych kongruencji strun jest równa ilości wielokrotnych spinorów Penrosa. Przestrzenie hiperniebiańskie typów [II,III,N] $\otimes$ [any] mają zatem tylko jedną kongruencję strun SD, a typ [D] $\otimes$ [any] wyposażony jest w dwie kongruencje strun SD. Typ [D] $\otimes$ [any] nie dopuszcza jednak istnienia dwóch kongruencji SD strun, z których jedna jest ekspandująca, a druga nieekspandująca [P4]. A zatem możliwe typy Petrova - Penrosa dla przestrzeni hiperniebiańskich to:

- $[\mathrm{II}]^n \otimes [\mathrm{any}]$, $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{any}]$ - przestrzenie hiperniebiańskie nieekspandujące z $\Lambda \neq 0$
- $[\mathrm{III,N}]^n \otimes [\mathrm{any}]$ - przestrzenie hiperniebiańskie nieekspandujące z $\Lambda = 0$
- $[\mathrm{II,III,N}]^e \otimes [\mathrm{any}]$, $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{any}]$ - przestrzenie hiperniebiańskie ekspandujące

Górny indeks $e$ oznacza, że kongruencja strun SD jest ekspandująca, a górny indeks $n$ oznacza kongruencję nieekspandującą. Jeśli kongruencje są dwie, używamy dwóch indeksów, $nn$ lub $ee$.

W przestrzeniach niebiańskich typu $[-] \otimes [\mathrm{any}]$ jest nieskończenie wiele kongruencji SD strun zerowych, przy czym jeśli $\Lambda = 0$, występują kongruencje zarówno ekspandujące, jak i nieekspandujące, natomiast jeśli $\Lambda \neq 0$, istnieją tylko ekspandujące kongruencje. W takim przypadku zazwyczaj pomijamy górny indeks, chyba, że któraś z nieskończonej liczby kongruencji jest w pewien sposób wyróżniona i warto wskazać jej własności (taka sytuacja występuje w pracy [H4]).

### Przestrzenie neutralne

Należy wspomnieć, że całkowicie zerowe, rzeczywiste powierzchnie w matematyce znane były już od lat pięćdziesiątych w tzw: *przestrzeniach Walkera* [27, 28, 61], niemniej formalizm przestrzeni hiperniebiańskich pozwolił na istotny postęp w tej dziedzinie [P2]. O ile bowiem znalezienie cięcia lorentzowskiego przestrzeni hiperniebiańskiej jest zadaniem trudnym, o tyle znalezienie cięcia neutralnego jest stosunkowo proste. Wystarczy znaleźć tetradę zerową,



Adam Chudecki

której wszystkie elementy bazy mogą być rozważone jako rzeczywiste. W większości przypadków wystarczy jedynie zastąpić współrzędne zespolone współrzędnymi rzeczywistymi, a funkcje holomorficzne funkcjami rzeczywistymi analitycznymi. Przestrzenie hiperniebiańskie to zatem użyteczne narzędzie do badania neutralnych przestrzeni Einsteina.

Przestrzenie neutralne pojawiły się ostatnimi czasy w wielu zagadnieniach fizyki teoretycznej. W pracy [22] rozważano "ostre" wersje twierdzenia Goldberga - Sachsa. W pracach [33,34], poświęconych dwóm ciałom toczącym się po sobie bez poślizgu i bez skręcenia pojawiły się przestrzenie neutralne wyposażone w dwie rodziny kongruencji strun zerowych. W szczególności należy wspomnieć o neutralnych przestrzeniach ASD. Przestrzenie takie pojawiły się w geometrii Ossermana [1,2,20], rozważano także ASD przestrzenie wyposażone w wektory Killinga [26], [P5], [P7]. W pracy [11] zanalizowano, jakie warunki konieczne i wystarczające muszą być spełnione, aby 4-wymiarowe ASD przestrzenie były lokalnie konforemne do przestrzeni Einsteina. Podsumowując, rzeczywiste 4-wymiarowe przestrzenie neutralne cieszą się coraz większym zainteresowaniem teoretyków.

**Rys autoreferatu**

Monotematyczny cykl publikacji [H1] - [H8], którego najważniejsze wyniki opiszę w dalszej części autoreferatu związany jest z wykorzystaniem symetrii i kongruencji strun zerowych w badaniach przestrzeni zespolonych i rzeczywistych.

Prace opublikowane przed uzyskaniem przeze mnie stopnia doktora [P1] - [P3] wykazały przydatność formalizmu przestrzeni hiperniebiańskich. W [P1] znaleźliśmy przykład przestrzeni typu $[\mathrm{N}] \otimes [\mathrm{N}]$ wyposażonej w kongruencje zerowych geodezyjnych z niezerowym twistem. Rozwiązanie to nie miało co prawda cięcia lorentzowskiego, ale dawało nadzieję na dalszy progres badań w tym kierunku. Ustaliliśmy, że dalszym krokiem powinno być rozważenie przestrzeni typu $[\mathrm{N}] \otimes [\mathrm{N}]$ z symetrią definiowaną przez wektor homotetyczny. W pracy [P2] formalizm nieekspandujących przestrzeni hiperniebiańskich pozwolił na uzyskanie jawnych metryk 4-wymiarowych przestrzeni Walkera i przestrzeni dwustronnie-walkerowskich. Z kolei w pracy [P3] głównym wynikiem było uzyskanie jawnych metryk przestrzeni Ossermana, które nie były jednocześnie przestrzeniami Walkera. W uzyskaniu metryk o takich własnościach fundamentalną rolę pełniła stała kosmologiczna.

Wnioski wynikające z prac [P1] - [P3] sugerowały zatem, że warto dokonać gruntownej analizy przestrzeni hiperniebiańskich pod kątem symetrii z niezerową stałą kosmologiczną. W 2009 roku sformułowałem plan pracy naukowej, którego głównym celem było uogólnienie rozważań zawartych w pracach [17, 42, 57] na przypadek niezerowej stałej kosmologicznej i właściwych symetrii konforemnych. Plan ten zrealizowałem w latach 2010-2013, efektem są prace [H1] - [H3]. Jednym z wniosków wypływających z tych prac było zauważenie związku między zerowymi wektorami homotetycznymi i kongruencjami strun zerowych[6]. Efektem jest praca [H4], w której zanalizowałem wszystkie zespolone i rzeczywiste przestrzenie Einsteina wyposażone w zerowy wektor homotetyczny.

Wyniki prac spoza cyklu monotematycznego [P5] - [P6] utwierdziły mnie w przekonaniu, jak ważną rolę pełni istnienie kongruencji strun zerowych w przestrzeniach zespolonych i rzeczywistych. W 2015 roku sformułowałem zatem dalszy plan pracy naukowej, którego celem była analiza wpływu istnienia kongruencji strun zerowych na własności przestrzeni. Najpierw wykorzystałem kongruencje strun zerowych jako narzędzie do znalezienia jawnych przykładów para-hermitowskich i para-kählerowskich przestrzeni Einsteina. Rezultaty opublikowane zostały w pracy [H6]. Rozważając z kolei kongruencje strun zerowych w zdegenerowanych algebraicznie przestrzeniach nie będących przestrzeniami Einsteina (słabe przestrzenie hiperniebiańskie) zauważyłem, jak silny wpływ ma obecność takich struktur na algebraiczne własności bezśladowego tensora Ricciego. Dokonałem zatem klasyfikacji bezśladowego tensora Ricciego w 4-wymiarowych przestrzeniach neutralnych [H5], a potem przedstawiłem analizę wpływu istnie-

[6] Później okazało się, że związek ten był już znany, porównaj [12].

 Adam Chudecki

nia kongruencji strun zerowych na tensor Ricciego [H7]. W ostatniej z prac [H8] zająłem się próżniowymi przestrzeniami typu [N] $\otimes$ [N]. Rozważania te zaowocowały znalezieniem nowych przykładów cięć lorentzowskich metryk zespolonych.

### 4.3.2 Symetrie w przestrzeniach hiperniebiańskich

Prace [H1] - [H2] poświęcone zostały symetriom w nieekspandujących przestrzeniach hiperniebiańskich. Głównym celem tych prac było wypełnienie luk pozostawionych przez J.F. Plebańskiego i J.D. Finleya w pracy [42], a zatem uogólnienie rozważań na właściwe symetrie konforemne i na przypadek z niezerową stałą kosmologiczną.

Przypomnijmy, że nieekspandujące przestrzenie hiperniebiańskie z $\Lambda \neq 0$ są typów $[\mathrm{II}]^n \otimes [\mathrm{any}]$ lub $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{any}]$. Jeśli stała kosmologiczna znika, nieekspandujące przestrzenie hiperniebiańskie są typów $[\mathrm{III,N}]^n \otimes [\mathrm{any}]$. Uogólnienie rozważań na niezerową stałą kosmologiczną było zatem szczególnie istotne, jako że symetrie w przestrzeniach typu $[\mathrm{II}]^n \otimes [\mathrm{any}]$ i $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{any}]$ nie były w ogóle rozważane przez J.F. Plebańskiego i współpracowników.

Pierwszym krokiem było wykazanie, że równania Killinga $\nabla_{(a}K_{b)} = \chi g_{ab}$ mogą zostać zredukowane do jednego równania. Równanie to nazwałem - podobnie jak autorzy pracy [42] - *równaniem master*. W pracy [H1] rozważałem różne typy algebraiczne oddzielnie[7], dzieląc analizę na trzy subsekcje (4.1, 4.2 i 4.3), w których badałem przestrzenie typów $[-] \otimes [\mathrm{any}]$, $[\mathrm{III,N}]^n \otimes [\mathrm{any}]$ i $[\mathrm{II,D}]^n \otimes [\mathrm{any}]$. Na szczególną uwagę zasługują:

- Rezultaty osiągnięte dla przestrzeni niebiańskich typu $[-] \otimes [\mathrm{any}]$, gdzie rozważania zostały uogólnione na właściwe symetrie konforemne. Napotkałem tam ten sam kłopotliwy szczegół, o którym wspominają J.F. Plebański i J.D. Finley w pracy [42]: w równaniu master pojawia się całka pierwsza równania niebiańskiego, która oznaczona jest symbolem $\Upsilon$. Należy tu zaznaczyć, że w przypadku symetrii homotetycznych, wielkości $\Upsilon$ można się pozbyć sprytnym trickiem opisanym w pracy [17], ale dla właściwych symetrii konforemnych taki chwyt nie działa. Zdałem sobie wówczas sprawę, że właściwe symetrie konforemne w przestrzeniach niebiańskich wymagają oddzielnego artykułu[8].

- Rozważania dla typów $[\mathrm{II}]^n \otimes [\mathrm{any}]$ i $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{any}]$, które - ponieważ wymagają $\Lambda \neq 0$ - są całkowicie oryginalne. Redukcja równań Killinga do równania master dla tych typów została przedstawiona w szczegółach (sekcja 6).

- Przykład zanalizowany w sekcji 5, poświęcony najsłabiej zdegenerowanej algebraicznie przestrzeni hiperniebiańskiej dopuszczającej właściwy wektor konforemny, czyli przestrzeni typu $[\mathrm{N}]^n \otimes [\mathrm{N}]^n$. Istnienie właściwego wektora konforemnego implikuje istnienie zerowego wektora Killinga, którym jest pochodna kowariantna czynnika konforemnego, $\nabla_a \chi$. Wiedząc to, rozwiązałem równanie master dla właściwego wektora konforemnego, równanie master dla zerowego wektora Killinga i równanie hiperniebiańskie. Wynikiem jest metryka (5.27)[9]. Należy dodać, że w przykładzie tym udało się znaleźć jawną postać funkcji kluczowej generującej tę metrykę - jest ona podana przez zależność (5.26).

Zdając sobie sprawę z nienaturalnego rozdziału rozważań na różne typy algebraiczne, zająłem się problemem redukcji równań Killinga jeszcze raz, w pracy [H2]. Udowodniłem, że każdy wektor Killinga, wektor homotetyczny lub właściwy wektor konforemny w nieekspandujących przestrzeniach hiperniebiańskich typu $[\mathrm{II,III,N}]^n \otimes [\mathrm{any}]$ lub $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{any}]$ ma postać

$$K = \delta^{\dot{B}} \frac{\partial}{\partial q^{\dot{B}}} + \left( 2\chi p^{\dot{B}} + \frac{\partial \delta^{\dot{M}}}{\partial q_{\dot{B}}} p_{\dot{M}} + \epsilon^{\dot{B}} \right) \frac{\partial}{\partial p^{\dot{B}}} \tag{IV.11}$$

[7] Praca ta zawiera również kilka błędów drukarskich, które zostały sprostowane w erracie zamieszczonej w artykule [H3].

[8] Cztery lata później wraz z M. Dobrskim poświęciliśmy tej tematyce pracę [P6].

[9] Metryka ta jest szczególnym przypadkiem metryki zespolonej pp-fali, która była rozważana w pracy [H2].



Adam Chudecki

a równania Killinga można zredukować do jednego równania master

$$\pounds_K \Theta = 2\Theta\Big(3\chi - \frac{\partial \delta^{\dot{N}}}{\partial q^{\dot{N}}}\Big) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \delta_{\dot{A}}}{\partial q^{\dot{B}} \partial q^{\dot{C}}} p^{\dot{A}} p^{\dot{B}} p^{\dot{C}} + \Big(\frac{1}{3} F_{\dot{A}} \epsilon_{\dot{B}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \epsilon_{\dot{A}}}{\partial q^{\dot{B}}}\Big) p^{\dot{A}} p^{\dot{B}} + \zeta_{\dot{A}} p^{\dot{A}} + \xi \tag{IV.12}$$

gdzie $\pounds_K$ to pochodna Liego wzdłuż pola wektorowego $K$, a funkcje $\delta^{\dot{A}}$, $\epsilon^{\dot{A}}$, $\zeta^{\dot{A}}$ i $\xi$ to dowolne funkcje współrzędnych $q^{\dot{M}}$. Warunki całkowalności równań Killinga określane są przez zależności (2.19), (2.20) i (2.21) w pracy [H2].

Głównym wynikiem pracy [H2] jest drobiazgowa klasyfikacja wektorów Killinga w nieekspandujących przestrzeniach hiperniebiańskich. Zbadałem postać wektorów Killinga, rozwiązałem równanie master w każdym przypadku, znalazłem postać spinorów[10] $l_{AB}$ i $l_{\dot{A}\dot{B}}$ i przedstawiłem postać zredukowanego nieekspandującego równania hiperniebiańskiego (wyniki te są zawarte w sekcji 3). Udowodniłem, że nieekspandujące przestrzenie hiperniebiańskie dopuszczają trzy typy wektorów Killinga ($\partial_{q^{\dot{1}}}$, $q^{\dot{1}}\partial_{p^{\dot{1}}}$, $\partial_{p^{\dot{1}}}$), oraz dwa typy wektorów homotetycznych ($\partial_{q^{\dot{1}}} + 2\chi_0 p^{\dot{A}}\partial_{p^{\dot{A}}}$, $2\chi_0 p^{\dot{A}}\partial_{p^{\dot{A}}}$).

W subsekcji 3.6 rozważyłem klasyfikację symetrii homotetycznych w przestrzeniach niebiańskich. Klasyczne podejście do tego problemu wyróżnia trzy zasadnicze rodzaje takich symetrii, w zależności od własności spinora $l_{AB}$:

- $l^{AB} l_{AB} \neq 0$ (porównaj [3, 10])
- $l^{AB} l_{AB} = 0$ (porównaj [9])
- $l_{AB} = 0$ (porównaj [12]) - wówczas wektor homotetyczny jest zerowy

Zaproponowane przez mnie podejście do klasyfikacji wektorów homotetycznych w przestrzeni niebiańskiej zaowocowało wyróżnieniem czterech typów takich symetrii. Przypadek $l^{AB} l_{AB} = 0$ odpowiada typowi nazwanemu $\mathcal{H}$HKI, przypadek $l_{AB} = 0$ odpowiada typowi $\mathcal{H}$HKIIIb, ale przypadek $l^{AB} l_{AB} \neq 0$ rozszczepia się na dwa podtypy, $\mathcal{H}$HKII i $\mathcal{H}$HKIIIa.

W pracy [H2] znalazłem wiele przykładów nieekspandujących przestrzeni hiperniebiańskich wyposażonych w symetrie. Szczególnie ciekawe przykłady to:

- Metryka (4.4) będąca ogólną metryką dopuszczającą zerowy wektor Killinga postaci $K = q^{\dot{1}}\partial_{p^{\dot{1}}}$. Metryka ta jest typu $[\mathrm{III},\mathrm{N},-]^n \otimes [\mathrm{N},-]^e$.
- Metryka (4.6) będąca ogólną metryką dopuszczającą zerowy wektor Killinga postaci $K = \partial_{p^{\dot{1}}}$. Metryka ta jest typu $[\mathrm{N},-]^n \otimes [\mathrm{N},-]^n$ i w późniejszych pracach została ona nazwana *zespoloną pp-falą*. Metryka ta dopuszcza bowiem rzeczywiste cięcie lorentzowskie, które jest znaną w OTW metryką próżniowej pp-fali typu [N]. W formaliźmie przestrzeni hiperniebiańskich funkcja kluczowa definiująca pp-falę określana jest zależnością (4.10). Jest to zarazem pierwsze cięcie lorentzowskie metryki zespolonej, które udało mi się znaleźć.
- Metryka (4.15), która jest przykładem przestrzeni typu $[\mathrm{N}]^n \otimes [\mathrm{N}]^n$ wyposażonej w symetrię zdefiniowaną przez niezerowy wektor Killinga typu $K = \partial_{q^{\dot{1}}}$.
- Metryka (4.18), będąca przykładem przestrzeni z $\Lambda \neq 0$ o dość rzadko spotykanym typie $[\mathrm{II}]^n \otimes [\mathrm{N}]^e$.

Praca [H3] poświęcona jest symetriom w ekspandujących przestrzeniach hiperniebiańskich. Jej głównym celem było uogólnienie rozważań A. Sonnleitner i J.D. Finleya z pracy [57] na

[10] Spinory te są proporcjonalne do SD i ASD części 2-formy $\nabla_{[a}K_{b]}$.



Adam Chudecki

przypadek niezerowej stałej kosmologicznej. Zwróćmy uwagę, że ekspandujące przestrzenie hiperniebiańskie w ogóle nie dopuszczają właściwych wektorów konforemnych. Udowodniłem, że każdy wektor Killinga lub wektor homotetyczny w przestrzeniach typu $[\mathrm{II,III,N}]^e \otimes [\mathrm{any}]$ lub $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{any}]$ ma postać

$$K = a\frac{\partial}{\partial w} + b\frac{\partial}{\partial t} + (b_t - 2\chi_0)\phi\frac{\partial}{\partial \phi} + \Big((2b_t - a_w - 2\chi_0)\eta + b_w\phi - \tau\epsilon\Big)\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{IV.13}$$

a równania Killinga redukują się do równania master

$$\begin{aligned} \pounds_K W = & -(4\chi_0 + 2a_w - 3b_t)W + \frac{b_w}{2\tau^2}\eta\Big(\mu\phi^3 - \frac{\Lambda}{3}\Big) + \alpha\phi^3 \\ & + \frac{1}{2\tau}\Big(-b_{ww}\phi^2 - b_{tt}\eta^2 + (a_{ww} - 2b_{tw})\eta\phi\Big) + \frac{1}{2}(\epsilon_w\phi + \epsilon_t\eta) + \beta \end{aligned} \tag{IV.14}$$

gdzie funkcje $b$, $\epsilon$, $\alpha$ i $\beta$ to dowolne funkcje współrzędnych $(w,t)$, natomiast $a = a(w)$. Warunki całkowalności równań Killinga dawane są przez zależności (3.26a), oraz (3.35a) - (3.35e).

Klasyfikacja symetrii przedstawiona jest w sekcji 4. Zanalizowałem postać wektorów Killinga i wektorów homotetycznych, oraz możliwe redukcje równania hiperniebiańskiego dla każdego typu symetrii i dla każdego typu algebraicznego. Ekspandujące przestrzenie hiperniebiańskie dopuszczają trzy typy wektorów Killinga ($\partial_w$, $\partial_t$, $\partial_\eta$), oraz trzy typy wektorów homotetycznych $(\partial_w - 2\chi_0(\phi\partial_\phi + \eta\partial_\eta)$, $\partial_t - 2\chi_0(\phi\partial_\phi + \eta\partial_\eta)$, $-2\chi_0(\phi\partial_\phi + \eta\partial_\eta))$.

Najciekawsze przykłady podane w sekcji 5 dotyczą:

- Przestrzeni typu $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{any}]$ wyposażonej w symetrie (subsekcja 5.1).
- Metryki (5.23), będącej ogólną metryką dla typów $[\mathrm{III}]^e \otimes \mathrm{III}]^e$ oraz $[\mathrm{N},-]^e \otimes \mathrm{N},-]^e$ z $\Lambda \neq 0$ wyposażonych w zerowy wektor Killinga $\partial_\eta$. Z tej metryki można dość łatwo uzyskać przykłady punktowych i globalnych przestrzeni Ossermana nie będących jednocześnie przestrzeniami Walkera, wyposażonych w symetrie.

We wszystkich przykładowych metrykach z prac [H2] - [H3] wyposażonych w zerowy wektor homotetyczny, wektor ten okazał się styczny do struny zerowej. Pojawia się naturalne pytanie, czy jest to przypadek, czy też może zawsze obecność zerowego wektora homotetycznego pociąga za sobą istnienie kongruencji strun zerowych do których jest on styczny? Postanowiłem zatem dokładniej zanalizować przestrzenie hiperniebiańskie i niebiańskie wyposażone w zerowy wektor homotetyczny i poświęciłem tej analizie pracę [H4].

Okazało się, że jeśli założy się istnienie zerowego wektora homotetycznego (który zawsze da się zapisać w postaci $K_{A\dot{B}} = m_A m_{\dot{B}}$), to z warunków całkowalności równań Killinga wynika, że spinory $m_A$ i $m_{\dot{A}}$ generują kongruencje odpowiednio SD i ASD strun zerowych. A zatem każdy zerowy wektor homotetyczny jest styczny do SD i ASD struny zerowej. Okazało się później, że wynik ten był już znany, przynajmniej w przestrzeniach ASD (porównaj [12]). Ogólna analiza z [H4] doprowadziła do formuł (2.31a)-(2.31f). Szczególnie ciekawa jest zależność na pochodną kowariantną zerowego wektora homotetycznego

$$\nabla_A^{\ \dot{B}} K_C^{\ \dot{D}} = m_C M_A \in^{\dot{B}\dot{D}} + m^{\dot{D}} M^{\dot{B}} \in_{AC} \tag{IV.15}$$

gdzie spinory $M_A$ i $M_{\dot{B}}$ to ekspansje kongruencji odpowiednio ASD i SD strun. Pochodna kowariantna takiego wektora jest zatem determinowana przez cztery pola spinorowe, $m_A$, $m_{\dot{B}}$, $M_A$ i $M_{\dot{B}}$.

Następnie doszedłem do wniosku, że zerowy i właściwie homotetyczny wektor jest dopuszczany jedynie przez przestrzenie typu $[\mathrm{N},-]^e \otimes [\mathrm{III},-]^n$. Wykorzystując formalizm przestrzeni hiperniebiańskich znalazłem ogólną metrykę przestrzeni typu $[\mathrm{III}]^n \otimes [\mathrm{N}]^e$ wyposażonej w zerowy i właściwie homotetyczny wektor - jest to metryka (4.6). W metryce tej pojawia się funkcja



Adam Chudecki

trzech zmiennych, która spełnia równanie (4.5). Niestety, równania (4.5) nie udało się rozwiązać. Należy wspomnieć, że przestrzeń $[\mathrm{III}]^n \otimes [\mathrm{N}]^e$ z zerową właściwą symetrią homotetyczną pojawiła się już we wcześniejszych pracach [H2] i [H3], ale nie była tam analizowana.

Jedyne niekonforemnie płaskie przestrzenie niebiańskie dopuszczające właściwie homotetyczny wektor zerowy to przestrzenie typów $[\mathrm{N}]^e \otimes [-]^n$ (metryka (4.9)) oraz $[\mathrm{III}]^n \otimes [-]^e$ (metryka (4.14)). Są to wyniki całkowicie oryginalne, zgodnie z moją wiedzą metryki przestrzeni niebiańskich z właściwie homotetyczną symetrią zerową wcześniej nie zostały znalezione jawnie. Metryka (4.14) jest ciekawa również z innego powodu: należy ona do grupy metryk dwustronnie-walkerowskich.

Znacznie więcej klas metryk dopuszcza zerowy wektor Killinga. Są to metryki przestrzeni typów

$$\begin{array}{rl}
(i) & [\mathrm{N},-]^n \otimes [\mathrm{N},-]^n, \ \Lambda = 0 \\
(ii) & [\mathrm{III,N},-]^n \otimes [\mathrm{N},-]^e, \ \Lambda = 0 \\
(iii) & [\mathrm{III}]^e \otimes [\mathrm{III}]^e, \ [\mathrm{N},-]^e \otimes [\mathrm{N},-]^e, \ \Lambda \neq 0 \\
(iv) & [\mathrm{II}]^e \otimes [\mathrm{II}]^e, \ [\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{D}]^{ee}, \ \Lambda \text{ dowolna}
\end{array}$$

Wiele metryk dopuszczających zerowy wektor Killinga pojawiło się w poprzednich pracach, np. metryki $(i)$ i $(ii)$ podano wcześniej w [H2], a $(iii)$ w [H3]. Przypomnijmy, że $(i)$ dopuszcza cięcie lorentzowskie, którym jest pp-fala. Szczegółowa analiza dowiodła, że przestrzenie $(ii)$ i $(iii)$ nie dopuszczają cięć lorentzowskich. W przypadku $(ii)$ powodem nieistnienia takiego cięcia są różne własności kongruencji strun SD i ASD (pierwsza jest nieekspandująca, a druga ekspandująca). Przypadek $(iii)$ jest jednak subtelniejszy. Oba warunki konieczne istnienia cięć lorentzowskich są tam spełnione: SD i ASD spinor Weyla są tego samego typu Petrova - Penrosa oraz obie kongruencje strun mają te same własności (obie są ekspandujące). Wiemy jednak, że cięcia lorentzowskie takich przestrzeni nie istnieją, bo musiałyby to być przestrzenie Einsteina typu [III] lub [N] z $\Lambda \neq 0$ i zerowym wektorem Killinga. Metryki takie nie istnieją w OTW.

Metryka klasy $(iv)$, czyli typ $[\mathrm{II}]^e \otimes [\mathrm{II}]^e$ z $\Lambda \neq 0$ została doprowadzona do postaci (5.5). Zależy ona od funkcji $W(\phi, w, t)$, która to funkcja spełnia równanie (5.6). Ogólne rozwiązanie równania (5.6) jest nieznane, nie udało mi się również znaleźć transformacji współrzędnych, która doprowadziłaby metrykę (5.5) do postaci odpowiedniej do odtworzenia cięcia lorentzowskiego (wiem, że takie cięcie istnieje [58]). Udowodniłem natomiast, że jedyna możliwa redukcja algebraiczna to typ $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{D}]^{ee}$, którego rozwiązaniem jest $W = 0$ i opisywany jest on przez metrykę (5.18).

Cięcie lorentzowskie udało się jednak znaleźć w przypadku typu $[\mathrm{II}]^e \otimes [\mathrm{II}]^e$ z $\Lambda = 0$. Znalazłem transformację współrzędnych, która doprowadza metrykę takiego typu do postaci

$$ds^2 = -2x\, du(dv + M du) + x^{-\frac{1}{2}}(dx^2 \pm dy^2) \tag{IV.16}$$

gdzie funkcja $M = M(x, y, u)$ spełnia równanie Eulera - Poissona - Darboux

$$xM_{xx} \pm xM_{yy} + M_x = 0 \tag{IV.17}$$

Jeśli w (IV.16) i (IV.17) potraktować współrzędne jako rzeczywiste a funkcję $M$ jako funkcję rzeczywistą analityczną, górne znaki odpowiadają za cięcie lorentzowskie (czyli typ [II] z $\Lambda = 0$ i zerowym wektorem Killinga), a znaki dolne za cięcie neutralne[11]. Jest to drugi znaleziony przeze mnie przykład cięcia lorentzowskiego metryki zespolonej.

### 4.3.3 Para-hermitowskie i para-kählerowskie przestrzenie Einsteina

W pracy [P4], wraz z M. Przanowskim i S. Formańskim zanalizowaliśmy *zespolone para-hermitowskie przestrzenie Einsteina.*

[11]Wprawdzie znaleziona w pracy [H4] transformacja (5.13) prowadzi jedynie do cięcia lorenzowskiego, ale jej niewielka modyfikacja: zamiana współrzędnej $t$ zgodnie z równaniem $\frac{t}{\tau} = \left(-\frac{1}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x+y)$ daje cięcie neutralne.



Adam Chudecki

**Definicja 4.3.** *Zespolona 4-wymiarowa przestrzeń para-hermitowska to przestrzeń wyposażona w niezdegenerowaną, holomorficzną metrykę, taką, że dla każdego punktu p istnieje otoczenie $U \subset \mathcal{M}$ i zespolone współrzędne $\{z^A, z^{\dot{B}}\}$ takie, że*

$$ds^2 = 2f_{A\dot{B}}dz^A dz^{\dot{B}}, \ \det(f_{A\dot{B}}) \neq 0 \tag{IV.18}$$

*gdzie $f_{A\dot{B}}$ to funkcje holomorficzne*[12].

Przestrzenie para-hermitowskie są wyposażone w dwie różne kongruencje strun zerowych SD bądź ASD. W ogólności obie kongruencje są ekspandujące, ale jeśli obie są nieekspandujące, wówczas istnieje funkcja $f$ taka, że $f_{A\dot{B}} = \partial^2 f/\partial z^A \partial z^{\dot{B}}$. Przestrzenie takie nazywają się *para-kählerowskie.* Z zespolonego twierdzenia Goldberga - Sachsa wynika, że para-hermitowskie przestrzenie Einsteina to przestrzenie typu $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{any}]$, a para-kählerowskie przestrzenie Einsteina to przestrzenie typu $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{any}]$. Jednym z ważniejszych wyników pracy [P4] była redukcja równań pola dla przestrzeni typu $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{any}]$ do jednego równania (5.13).

W pracach [33, 34] neutralne przestrzenie Einsteina z $\Lambda \neq 0$ pełniły ważną rolę. Zdecydowałem się zatem wykorzystać wyniki pracy [P4] i formalizm przestrzeni hiperniebiańskich do znalezienia jawnych metryk zespolonych i neutralnych przestrzeni para-hermitowskich i para-kählerowskich i poświęciłem temu zagadnieniu pracę [H6]. Dobrałem tetradę zerową w taki sposób, że pierwsza kongruencja strun SD rozpinana była przez wektory $(\partial_1, \partial_3)$, a druga kongruencja strun zerowych SD - przez wektory $(\partial_2, \partial_4)$. Jest jednak jasne, że obecność nawet dwóch różnych kongruencji strun SD to zbyt mało, aby uzyskać ogólne rozwiązania. Założyłem zatem istnienie dodatkowej kongruencji strun ASD (co równoważne było algebraicznej degeneracji ASD spinora Weyla). Do wyboru są wówczas dwie drogi:

1. Wykorzystać równanie hiperniebiańskie bądź równanie (5.13) z pracy [P4]; wówczas jednak nie można tak dobrać tetrady zerowej, aby kongruencja strun ASD rozpinana była przez wektory $(\partial_1, \partial_4)$, przynajmniej w ogólności.

2. Dobrać tetradę zerową tak, aby kongruencja strun ASD była rozpinana przez wektory $(\partial_1, \partial_4)$; wówczas należy rozwiązywać równania Einsteina od początku, jako że ani równanie hiperniebiańskie, ani równanie (5.13) z pracy [P4] nie są słuszne, przynajmniej w ogólności.

Zdecydowałem się na znaczące uproszczenie problemu, wybierając obie drogi równocześnie, tzn: pracowałem z równaniem hiperniebiańskim lub równaniem (5.13) z pracy [P4], ale jednocześnie założyłem, że kongruencja strun ASD rozpinana jest przez wektory $(\partial_1, \partial_4)$. To uproszczenie pozwoliło na uzyskanie wielu przykładów jawnych metryk para-kählerowskich przestrzeni Einsteina (które istnieją jedynie gdy $\Lambda \neq 0$) oraz para-hermitowskich przestrzeni Einsteina (dla których $\Lambda$ może być dowolna, choć skupiłem się raczej na przypadku z $\Lambda \neq 0$). Uzyskane rozwiązania zebrano w Tabelach 1 i 2. Uwagi:

- Typ $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{II}]^n$ rozwiązałem później z zachowaniem całkowitej ogólności, wynik ten został opublikowany w pracy [P8] pozostającej poza cyklem monotematycznym.
- Metryka (5.13) opisująca typ $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{D}]^{nn}$ jest ogólnym rozwiązaniem *para-kählerowskiej jednorodnej przestrzeni Einsteina*, porównaj [35]. Jest to jednocześnie ogólne rozwiązanie typu $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{D}]^{nn}$, co udało mi się udowodnić później i dowodu tego faktu nie ma w [H6].
- Typy $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{III}]^n$ i $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{N}]^n$ istnieją jedynie dla $\Lambda = 0$.
- Wszystkie znalezione metryki typu $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{D}]^{nn}$ nie dopuszczają cięcia lorentzowskiego i jest to pierwszy znany mi przypadek znalezienia metryk zespolonych, których SD i ASD spinor Weyla są typu [D], a które nie dopuszczają cięcia lorentzowskiego.

[12] Zwróćmy uwagę, że jeśli współrzędne $z_A$ i $z_{\dot{B}}$ będziemy rozważać jako rzeczywiste, dostaniemy przestrzeń neutralną, a jeśli $z_{\dot{A}} = \overline{z_A}$, to dostaniemy przestrzeń z metryką o sygnaturze $(++++)$.



Adam Chudecki

| Typ | Przykłady |
|---|---|
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{I}]$ | brak przykładów |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{II}]^{e}$ | brak przykładów |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{II}]^{n}$ | (5.11) |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{D}]^{ee}$ | po zamianie orientacji (3.43) z $S_0 = 0$ i (3.47) z $S_0 = 0$ |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{D}]^{nn}$ | (5.13) |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{III}]^{e}$ | (5.16) |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{III}]^{n}$ | nie istnieje |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{N}]^{e}$ | (5.16) z $f = f_0 z$ |
| $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{N}]^{n}$ | nie istnieje |

Tabela 1: Metryki para-kählerowskie znalezione w pracy [H6].

### 4.3.4 Kongruencje strun zerowych w słabych przestrzeniach hiperniebiańskich

Wyniki pracy [H6] pokazują, jak ważną geometryczną strukturą są kongruencje strun zerowych w przestrzeniach hiperniebiańskich. To zwróciło moją uwagę na prace [50], gdzie analizowano przypadek przestrzeni para-kählerowskiej nie będącej przestrzenią Einsteina. Intrygujący (choć mało znany) rezultat został przedstawiony w pracy [55], gdzie znaleziono ogólną metrykę przestrzeni dopuszczającej trzy różne kongruencje SD strun zerowych. Oczywiście przestrzeń taka nie może być przestrzenią Einsteina, takie bowiem dopuszczają co najwyżej dwie różne kongruencje SD strun zerowych. Zastanowiło mnie, czy istnienie kongruencji strun zerowych ma jakiś wpływ na bezśladowy tensor Ricciego?

Szybko stało się jasne, że pierwszym krokiem powinno być sklasyfikowanie bezśladowego tensora Ricciego w 4-wymiarowych przestrzeniach o sygnaturze neutralnej. Klasyfikacja taka w przypadku lorentzowskim została przedstawiona w klasycznej pracy [39] (trochę inne podejście zaprezentowano w [25, 38]), a klasyfikacji w przypadku zespolonym poświęcono pracę [51]. Klasyfikacji w przypadku neutralnym poświęciłem pracę [H5].

Skupiłem się na algebraicznych własnościach macierzy $(C^{a}{}_{b})$ bezśladowego tensora Ricciego i użyłem następujących kryteriów:

- ilość i rodzaj wektorów własnych (przestrzenno-podobne, czasowo-podobne, zerowe)[13]
- ilość i rodzaj wartości własnych wielomianu charakterystycznego (zespolone lub rzeczywiste, pojedyncze, podwójne, potrójne lub poczwórne)
- postać wielomianu minimalnego
- typ Petrova-Penrosa spinorów Plebańskiego[14]

Wyróżniłem 9 głównych typów i aż 33 podtypy bezśladowego tensora Ricciego w przestrzeniach neutralnych. Tak duża ilość podtypów przekonała mnie, że warto odejść od eleganckiej i minimalistycznej konwencji symboli przypisywanych do poszczególnych typów, stosowanej przez

[13] W przestrzeni o sygnaturze $(++--)$ zdefiniowałem wektory przestrzenno-podobne i czasowo-podobne analogicznie, jak są one definiowane w przestrzeni lorentzowskiej: jeśli $V^a V_a > 0$ wektor jest przestrzenno-podobny, a jeśli $V^a V_a < 0$ - czasowo-podobny.

[14] *Spinory Plebańskiego* są zdefiniowane, jak następuje: $V_{ABCD} := 4C_{(AB}{}^{\dot{M}\dot{N}}C_{AC)\dot{M}\dot{N}}$, $V_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} := 4C_{MN(\dot{A}\dot{B}}C^{MN}{}_{\dot{C}\dot{D})}$ gdzie $C_{AB\dot{C}\dot{D}}$ to spinorowy obraz bezśladowego tensora Ricciego.



Adam Chudecki

| Typ | Przykłady |
|---|---|
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{I}]$ | brak przykładów |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{II}]^{e}$ | (3.31) z $f \neq 0$, (3.35) z $f_y \neq 0$ |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{II}]^{n}$ | (3.31) z $f = 0$ |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{D}]^{ee}$ | (3.43) z $S_0 \neq 0$ i (3.47) z $S_0 \neq 0$ |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{D}]^{nn}$ | (3.43) z $S_0 = 0$ i (3.47) z $S_0 = 0$ |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{III}]^{e}$ | (3.57) |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{III}]^{n}$ | (3.61) |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{N}]^{e}$ | brak przykładów |
| $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{N}]^{n}$ | brak przykładów |

Tabela 2: Metryki para-hermitowskie znalezione w pracy [H6].

J.F. Plebańskiego i M. Przanowskiego w [39, 51] na rzecz symbolu bardziej skomplikowanego, z którego jednak od razu da się odczytać własności $(C^{a}{}_{b})$. Zaproponowałem symbol

$$^{[\mathrm{A}_j]\otimes[\mathrm{B}_k]}[n_1 E_1^{\alpha_1} - n_2 E_2^{\alpha_2} - \ldots]^{v}_{(q_1 q_2 \ldots)}$$

gdzie

- $[\mathrm{A}_j]$ i $[\mathrm{B}_k]$ to typy Petrova - Penrosa niekropkowanego i kropkowanego spinora Plebańskiego. (Spinory Plebańskiego są symetryczne we wszystkich czterech indeksach, można je zatem klasyfikować dokładnie tak, jak klasyfikuje się SD i ASD spinor Weyla. Przypomnijmy, że w przestrzeniach neutralnych jest aż 10 takich typów, porównaj, np: [22])
- $v$ to ilość wektorów własnych
- $(q_1 q_2 \ldots)$ opisuje postać wielomianu minimalnego
- $E_i^{\alpha_i}$ to różne wartości własne, $E_i = \{Z, R\}$ ($Z$ - zespolone, $R$ - rzeczywiste), indeks górny $\alpha_i = \{n, s, t, ns, nt, nst\}$ oznacza rodzaj odpowiadającego danej wartości własnej rzeczywistego wektora własnego, ($n$ - zerowy, $s$ - przestrzenno-podobny, $t$ - czasowo-podobny, $ns$ - zerowy lub przestrzenno-podobny, $nt$ - zerowy lub czasowo-podobny, $nst$ - dowolny)
- $n_i$ to wielokrotności wartości własnych

W pracy [H5] rozważyłem kryteria odróżniające poszczególne typy, naszkicowałem diagramy degeneracji poszczególnych typów, w końcu znalazłem kanoniczne postacie $(C^{a}{}_{b})$ dla każdego typu. Znając klasyfikację bezśladowego tensora Ricciego w przestrzeniach neutralnych można było wrócić do problemu powiązania własności kongruencji strun zerowych z własnościami tego tensora.

W pracy [H7] rozważałem przestrzenie wyposażone w jedną, dwie, trzy i cztery kongruencje SD strun zerowych. Z warunków całkowalności równań strun SD łatwo można wywnioskować dwa fakty:

1. jeśli spinor $m_A$ generuje kongruencję SD strun zerowych, to spinor ten jest niekropkowanym spinorem Penrosa (Twierdzenie 3.3 w [H7])
2. jeśli spinor $m_A$ generuje nieekspandującą kongruencję SD strun zerowych, to spinor ten jest wielokrotnym niekropkowanym spinorem Penrosa (Twierdzenie 3.4 w [H7])



Adam Chudecki

Jeśli zatem rozważymy przestrzeń wyposażoną w co najmniej jedną nieekspandującą kongruencję strun SD, należy ona do ważnej klasy *słabych przestrzeni hiperniebiańskich* (patrz np. [P2]).

**Definicja 4.4.** *Słaba przestrzeń hiperniebiańska to 4-wymiarowa zespolona przestrzeń wyposażona w holomorficzną metrykę, spełniająca następujące warunki*

(*i*) *SD spinor Weyla jest algebraicznie specjalny i spinor* $m_A$ *jest wielokrotnym spinorem Penrosa*

(*ii*) *przestrzeń dopuszcza kongruencję SD strun zerowych generowaną przez spinor* $m_A$

Oczywiście w przestrzeniach Einsteina $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ (wynika to z zespolonego twierdzenia Goldberga - Sachsa).

Najciekawsze rezultaty z pracy [H7] to:

- Powiązanie dopuszczanych typów algebraicznych SD spinora Weyla z istnieniem kongruencji SD strun zerowych o różnych własnościach (Tabele I, IV, V i VII). Część z tych wyników była już wcześniej znana, a część (sekcja V) jest oryginalna.

- Wykazanie, że jeśli przestrzeń dopuszcza dwie kongruencje SD strun zerowych, to ich ekspansje, wektor Sommersa i pochodne kowariantne tych obiektów wyznaczają bezśladowy tensor Ricciego (formuły (4.7a)-(4.7c)).

- Określenie, jakie algebraiczne typy bezśladowego tensora Ricciego są dopuszczane przez przestrzeń wyposażoną w jedną nieekspandującą kongruencję SD strun zerowych (Tabela II). Warto tu zwrócić uwagę na wykrycie niezwykle subtelnej różnicy w typach $^{(2)}[4N]_2^a$ i $^{(2)}[4N]_2^b$ opisanych wcześniej w [50]. W typie $^{(2)}[4N]_2^b$ oba zerowe wektory własne bezśladowego tensora Ricciego są styczne do struny zerowej, podczas gdy w typie $^{(2)}[4N]_2^a$ styczny jest tylko jeden z nich.

- Określenie, jakie algebraiczne typy tensora Ricciego są dopuszczane przez przestrzeń wyposażoną w dwie nieekspandujące kongruencję SD strun zerowych (Tabela VI).

- Wyspecyfikowanie metryki uzyskanej przez I. Robinsona i K. Rózgę w pracy [55], opisującej przestrzeń wyposażoną w trzy różne ekspandujące kongruencje strun zerowych na przypadek dwóch strun ekspandujących i jednej nieekspandującej (Twierdzenie 5.3).

Praca [H7] zawiera jeszcze jeden ciekawy rezultat ściśle związany z kongruencjami SD strun zerowych, ale wychodzący poza słabe przestrzenie hiperniebiańskie. W subsekcji V.C rozważałem przestrzeń wyposażoną w cztery różne kongruencje SD strun zerowych (jest to możliwe jedynie dla przestrzeni typu [I] $\otimes$ [any] w przypadku przestrzeni zespolonych i przestrzeni typu $[\mathrm{I}_r] \otimes$ [any] w przypadku przestrzeni rzeczywistych neutralnych, przy czym wszystkie kongruencje strun muszą być ekspandujące). W Twierdzeniu 5.4 przedstawiłem sposób podejścia do tego problemu, sprowadzając go do układu trzech równań na cztery funkcje. Układu tego jednak nie udało się rozwiązać[15].

### 4.3.5 Przestrzenie typu [N] $\otimes$ [N]

Problem próżniowych równań Einsteina typu [N] z twistem jest jednym z nierozwiązanych problemów OTW. Wraz z M. Przanowskim zajmowaliśmy się tym problemem w pracach [P1] oraz [P9], wykorzystując formalizm przestrzeni hiperniebiańskich typu $[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e$. Podejście to nie pozwoliło nam jednak na uzyskanie jawnych rozwiązań. Po pierwsze: równania pola dla

[15] Wydaje mi się, że problem przestrzeni wyposażonych w cztery kongruencje SD strun zerowych da się rozwiązać jawnie, ale wymaga on innego podejścia. Jest to jeden z najważniejszych problemów, do których zamierzam w przyszłości powrócić.



Adam Chudecki

przestrzeni typu $[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e$ z twistem są bardzo skomplikowane. Po drugie: wciąż nie znamy ogólnej techniki znajdywania cięć lorentzowskich przestrzeni zespolonych. Nawet, gdyby udało się znaleźć jawne rozwiązanie równań pola (lub choćby zredukować problem do równania różniczkowego drugiego rzędu), stanęlibyśmy przed problemem znalezienia cięcia lorentzowskiego. Fakt, że SD i ASD spinory Weyla są tego samego typu algebraicznego, a kongruencje SD i ASD strun zerowych mają te same własności, nie są gwarantem istnienia cięcia lorentzowskiego. Opisałem już przestrzenie spełniające te warunki i nie posiadające cięcia lorentzowskiego (patrz strona 10).

Należy zatem szczegółowo zbadać zespolone przestrzenie których SD i ASD spinory Weyla są typu [N] i spróbować odtworzyć z nich rozwiązania lorentzowskie typu [N] w nadziei, że dzięki temu uda się sformułować jakieś ogólne wnioski dotyczące cięć lorentzowskich. Ponadto, w pracy [P9] znaleźliśmy niezwykle ciekawą metrykę typu $[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^n$ wyposażoną w kongruencje zerowych geodezyjnych z twistem i dopuszczającą dwa wektory homotetyczne. Naturalnym uogólnieniem pracy [P9] byłoby zanalizowanie tego samego typu bez żadnych symetrii i sprawdzenie, jak zachowują się dla tego typu równania pola. Tym zagadnieniom poświęciłem pracę [H8].

Pierwszym krokiem w [H8] było założenie istnienia kongruencji SD i ASD strun zerowych i powiązanie ich własności z własnościami wzajemnego przecięcia. Przecięcie kongruencji SD i ASD strun zerowych daje kongruencję zerowych geodezyjnych. Zdefiniowałem *zespoloną ekspansję* $\theta$, *zespolony twist* $\varrho$ i *zespolony shear* $s$ tak samo, jak definiuje się te wielkości w przestrzeniach lorentzowskich (zależności (3.6)). Potem rozważyłem kongruencję zerowych geodezyjnych w parametryzacji afinicznej i znalazłem zależność między $\theta$ i $\varrho$ a ekspansjami kongruencji strun zerowych

$$
\begin{aligned}
\theta &\sim m_A M^A + m_{\dot{A}} M^{\dot{A}} \\
\varrho &\sim m_A M^A - m_{\dot{A}} M^{\dot{A}}
\end{aligned}
\tag{IV.19}
$$

gdzie $m_A$ to spinor generujący kongruencję strun SD z ekspansją określaną przez $M_{\dot{A}}$, a $m_{\dot{A}}$ to spinor generujący kongruencję ASD strun z ekspansją daną przez $M_A$.

Każdą przestrzeń typu $[\mathrm{N}] \otimes [\mathrm{N}]$ można klasyfikować wykorzystując własności kongruencji strun, a jako subklasyfikacji można użyć własności ich przecięcia, czyli kongruencji zerowych geodezyjnych. Dla przestrzeni Einsteina z $\Lambda = 0$ typu $[\mathrm{N}] \otimes [\mathrm{N}]$ jest dokładnie 6 różnych podtypów (patrz Tabela 3). Symbol $[++]$ oznacza, że kongruencja zerowych geodezyjnych jest ekspandująca i twistująca, $[+-]$ oznacza kongruencję ekspandującą ale bez twistu, $[-+]$ to kongruencja bez ekspansji, ale z twistem, a $[--]$ oznacza kongruencję bez ekspansji i bez twistu. W przypadku przestrzeni nie będących przestrzeniami Einsteina pojawia się jeszcze jeden typ $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [-+]\}$, który dla przestrzeni Einsteina z $\Lambda = 0$ jest wykluczony przez równanie Raychaudhuriego.

Następnie znalazłem funkcję kluczową dla każdego typu i wstawiłem ją w ekspandujące równanie hiperniebiańskie. Równanie to udało się rozwiązań całkowicie lub doprowadzić do równania cząstkowego drugiego rzędu. Zbadałem również symetrie we wszystkich typach, dopuszczając najpierw jeden, a potem dwa wektory homotetyczne. Najciekawsze z nowych wyników to:

- Znalezienie cięcia lorentzowskiego typu $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [--]\}$, którym okazała się być klasa metryk znana jako próżniowa klasa Kundta typu [N] (subsekcja 5.1). Jest to trzeci przykład cięcia lorentzowskiego metryki zespolonej znaleziony przeze mnie.
- Wykazanie, że zespolona pp-fala to typ $\{[\mathrm{N}]^n \otimes [\mathrm{N}]^n, [--]\}$ a zespolona klasa Kundta to typ $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [--]\}$. Na poziomie metryk lorentzowskich obie te przestrzenie wyposażone są w kongruencję zerowych geodezyjnych bez ekspansji i bez twistu, ale pp-fale mają zerowy wektor Killinga, który nie występuje w klasie Kundta. Na poziomie kompleksyfikacji różnica między tymi przestrzeniami jest jeszcze bardziej transparentna: zespolone pp-fale mają obie kongruencje strun zerowych nieekspandujące, a zespolona klasa Kundta



Adam Chudecki

| Typ | W pracy [H8] rozważane w: |
|---|---|
| $\{[\mathrm{N}]^n \otimes [\mathrm{N}]^n, [--]\}$ | sekcji 4 |
| $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^n, [--]\}$ | sekcji 6 |
| $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^n, [++]\}$ | sekcji 8 |
| $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [--]\}$ | sekcji 5 |
| $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [+-]\}$ | sekcji 7 |
| $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [++]\}$ | nie rozważane |

Tabela 3: Możliwe typy przestrzeni $[\mathrm{N}] \otimes [\mathrm{N}]$.

ma je obie ekspandujące, w obu przypadkach przecinają się one jednak wzdłuż kongruencji zespolonych zerowych geodezyjnych nieekspandujących i bez twistu.

- Znalezienie cięcia lorentzowskiego typu $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [+-]\}$ którym okazała się być próżniowa klasa metryk Robinsona - Trautmana (subsekcja 7.1). Jest to czwarty przykład cięcia lorentzowskiego metryki zespolonej znaleziony przeze mnie.
- Zupełnie nowa klasa metryk typu $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^n, [--]\}$ dopuszczających jedynie cięcia neutralne[16] (sekcja 6).
- Zupełnie nowa klasa metryk typu $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^n, [++]\}$ dopuszczających jedynie cięcia neutralne (sekcja 8) i wyposażonych w kongruencję zerowych geodezyjnych z twistem. Równania pola dają się w tym przypadku zredukować do jednego równania. Jest to równanie (8.4) w przypadku braku symetrii i równanie (8.9) w przypadku jednej symetrii. Przypadek z dwiema symetriami był rozważany w pracy [P9].

### 4.3.6 Podsumowanie monotematycznego cyklu publikacji

Monotematyczy cykl publikacji którego szczegółowe wyniki opisałem w sekcjach 4.3.2-4.3.5, opiera się na ośmiu pracach [H1] - [H8] opublikowanych w latach 2010-2018. Prace te poświęcone są badaniom symetrii i geometrii strun zerowych w silnych i słabych przestrzeniach hiperniebiańskich. Za najważniejsze wyniki cyklu uznaję:

- Szczegółową analizę wektorów Killinga, wektorów homotetycznych i właściwych wektorów konforemnych w przestrzeniach hiperniebiańskich ([H1], [H2], [H3], [H4]).
- Klasyfikację bezśladowego tensora Ricciego w 4-wymiarowych przestrzeniach neutralnych ([H5]).
- Przykłady metryk para-hermitowskich i para-kählerowskich przestrzeni Einsteina, z których wiele - zgodnie z moją wiedzą - jest najogólniejszymi rozwiązaniami takich przestrzeni o określonych typach algebraicznych ([H6]).
- Powiązanie własności geometrycznych kongruencji strun zerowych z własnościami bezśladowego tensora Ricciego ([H7]).
- Szczegółowa analiza przestrzeni, których SD i ASD część tensora Weyla jest typu [N] ([H8]).

[16] Szczególna klasa metryk tego typu dopuszczających zerowy wektor Killinga była rozważana wcześniej w [H4].

 Adam Chudecki

- Znalezienie czterech przykładów cięć lorentzowskich przestrzeni zespolonych. Trzy z tych przykładów dotyczą przestrzeni Einsteina typu [N] ([H2], [H8]), a jeden przestrzeni Einsteina typu [II] ([H4]).

# 5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

## 5.1 Pozostałe publikacje

[P1] Chudecki A. i Przanowski M., 2008, *A simple example of type-[N] $\otimes$ [N] $\mathcal{HH}$-spaces admitting twisting null geodesic congruence*, Classical and Quantum Gravity **25**, 055010

[P2] Chudecki A. i Przanowski M., 2008, *From hyperheavenly spaces to Walker and Osserman spaces: I*, Classical and Quantum Gravity **25**, 145010

[P3] Chudecki A. i Przanowski M., 2008, *From hyperheavenly spaces to Walker and Osserman spaces: II*, Classical and Quantum Gravity **25**, 235019

[P4] Przanowski M., Formański S. i Chudecki A., 2012, *Notes on para-Hermite-Einstein spacetimes*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 9, No. 1, 1250008

[P5] Chudecki A. i Przanowski M., 2013, *Killing Symmetries in $\mathcal{H}$ spaces with $\Lambda$*, Journal of Mathematical Physics **54**, 102503

[P6] Chudecki A. i Dobrski M., 2014, *Proper conformal symmetries in self-dual Einstein spaces*, Journal of Mathematical Physics **55**, 082502

[P7] Chudecki A., 2016, *All complex and real ASD Einstein spaces with $\Lambda$ admitting nonnull Killing vector*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 13, No. 2, 1650011

[P8] Chudecki A., 2017, *Congruences of null strings and their relations with Weyl tensor and traceless Ricci tensor*, Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement, Vol. 10, No. 2

[P9] Chudecki A. i Przanowski M., 2018, *On twisting type [N] $\otimes$ [N] Ricci flat complex spacetimes with two homothetic symmetries*, Journal of Mathematical Physics **59**, 042504

## 5.2 Prace [P1], [P9]

Prace [P1] oraz [P9] to prace poświęcone zespolonym przestrzeniom których SD i ASD część tensora Weyla jest typu [N] i które wyposażone są w kongruencje SD i ASD strun zerowych których przecięcie wyznacza kongruencję zerowych geodezyjnych z twistem. W notacji zaproponowanej w [H8] przestrzenie takie oznaczane są symbolem $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^e, [++]\}$. To właśnie pośród cięć lorentzowskich takich przestrzeni należy szukać rzeczywistych lorentzowskich przestrzeni typu [N] z twistem.

W pracy [P1] wykorzystaliśmy postać funkcji kluczowej dla ekspandującej przestrzeni hiperniebiańskiej znalezioną w [49]. Funkcję kluczową wstawiliśmy w ekspandujące równanie hiperniebiańskie uzyskując ogólne równanie dla przestrzeni typu [deg] $\otimes$ [deg] - jest to równanie (3.2). (Podobną drogę zaproponowano w [13, 19]). Następnie równanie (3.2) zostało wyspecyfikowane dla przestrzeni typu [N] $\otimes$ [N] (równanie (3.4)), które analizowaliśmy dla szczególnego przypadku. Efektem było uzyskanie ciekawego przykładu (metryka (4.15)). Przestrzeń z tego przykładu wyposażona jest w kongruencję zerowych geodezyjnych z twistem, ale nie posiada, niestety, cięcia lorentzowskiego. Należy ona jednak do klasy przestrzeni Walkera, co zasugerowało wykorzystanie formalizmu przestrzeni hiperniebiańskich w badaniu takich przestrzeni (poświęcona temu została praca [P2]).

 Adam Chudecki

Formalizm przestrzeni hiperniebiańskich w celu znalezienia rozwiązań typu [N] $\otimes$ [N] z twistem wykorzystaliśmy jeszcze raz, w pracy [P9]. Pierwszym krokiem było znalezienie funkcji kluczowej dla przestrzeni typu [N] $\otimes$ [N] w postaci nieco innej niż ta zaproponowana przez J.F. Plebańskiego i G.F. Torresa del Castillo w [49]. Wykorzystując inne współrzędne niż współrzędne użyte w [13, 19], znaleźliśmy funkcję kluczową w postaci (3.12). Ekspandujące równanie hiperniebiańskie dało układ trzech równań (3.21) na dwie funkcje trzech zmiennych[17]. Stopień skomplikowania tego układu równań potwierdził wnioski wyciągnięte w pracy [P1]: analiza przestrzeni typu [N] $\otimes$ [N] z twistem bez jakiejkolwiek symetrii jest zadaniem bardzo trudnym, jeśli nie beznadziejnym. Zdecydowaliśmy się zatem wyposażyć przestrzeń w dwie symetrie homotetyczne. Udowodniliśmy, że wektor Killinga może być zawsze doprowadzony do postaci $\partial_w$, a wektor homotetyczny - do postaci $w\partial_w + t\partial_t + (1 - 2\chi_0)(\phi\partial_\phi + \eta\partial_\eta)$.

Rozwiązując układ równań (3.21) można zauważyć, że naturalnie rozpada się on na dwa przypadki. Przypadek ogólny doprowadził do metryki (6.6), a równania pola zredukowały się do niezwykle skomplikowanego równania różniczkowego zwyczajnego, piątego rzędu, silnie nieliniowego - jest to równanie (6.17). Niestety, nie udało się zredukować tego równania, ani znaleźć żadnego specjalnego rozwiązania, ani nawet odtworzyć rozwiązania Hausera. Udowodniono jednak, że zagadnienie próżniowych przestrzeni typu [N] $\otimes$ [N] z twistem i dwiema symetriami ma zawsze rozwiązanie, dla dowolnych warunków początkowych i dla dowolnej wartości parametru homotetycznego $\chi_0$, oraz dla metryk o sygnaturze lorentzowskiej i neutralnej. Opisane podejście jest również pewnym postępem w stosunku do podejścia zaproponowanego w [14], gdzie nie udało się uzyskać redukcji problemu do jednego równania.

O ile przypadek ogólny jest niezwykle skomplikowany, przypadek szczególny daje się rozwiązać całkowicie. Efektem jest metryka (5.17) zależna od funkcji jednej zmiennej $U(h)$, spełniającej równanie (5.18) z rozwiązaniem danym szeregiem (5.16). Podobieństwo równania (5.18) do równania występującego w rozwiązaniu Hausera jest uderzające. W rozwiązaniu Hausera parametr homotetyczny ma ustaloną wartość, natomiast w równaniu (5.18) jest on dowolny. Szczegółowa analiza wskazała jednak, że przestrzeń dawana metryką (5.17) jest wyposażona w nieekspandującą kongruencję ASD strun zerowych, a zatem nie dopuszcza cięcia lorentzowskiego. W notacji z pracy [H8] jest to przestrzeń typu $\{[\mathrm{N}]^e \otimes [\mathrm{N}]^n, [++]\}$[18].

## 5.3 Praca [P2]

Praca [P2] poświęcona jest wykorzystaniu formalizmu przestrzeni hiperniebiańskich w badaniu geometrii przestrzeni Walkera. Przestrzeń Walkera zdefiniowana jest jako trójka $(\mathcal{M}, g, \mathcal{D})$, gdzie $\mathcal{M}$ to $n$-wymiarowa gładka rozmaitość, $g$ to metryka pseudo-Riemannowska oraz $\mathcal{D}$ to $r$-wymiarowa, całkowicie zerowa i równolegle przenoszona dystrybucja [8, 27, 61]. W [P2] skoncentrowano się na przypadku $n = 4$ i $r = 2$.

Najpierw wykazaliśmy związek między przestrzeniami hiperniebiańskimi a przestrzeniami Walkera. Zdefiniowaliśmy *słabą przestrzeń hiperniebiańską* (patrz Definicja 4.4 na stronie 14) i znaleźliśmy jej metrykę (3.4), a następnie wykazaliśmy, że każda słaba, rzeczywista przestrzeń hiperniebiańska jest konforemnie równoważna przestrzeni Walkera. Następnie w zwartym formaliźmie spinorowym znaleźliśmy metryki dla samodualnych przestrzeni Walkera i samodualnych przestrzeni Einsteina-Walkera. Szczególnie ciekawym był przypadek samodualnej przestrzeni Einsteina-Walkera z $\Lambda = 0$: w tym przypadku otrzymano układ równań (4.31) (znaleziony wcześniej w [8]), którego rozwiązanie nie było znane.

Kolejnym krokiem było rozważenie przestrzeni wyposażonych w dwie równolegle przenoszone dystrybucje, jedną samodualną i drugą antysamodualną. Zdefiniowaliśmy w ten sposób *przestrzeń dwustronnie-walkerowską* (*two-sided Walker space*). Znaleźliśmy jej ogólną metrykę (Twierdzenie 5.1) i wykorzystaliśmy wyniki do rozwiązania układu równań (4.31). W ten sposób

[17]Ten nadokreślony układ równań jest obecnie intensywnie analizowany w przypadku ogólnym i w przypadku jednej symetrii homotetycznej.

[18]Przykład z pracy [P1] jest szczególnym przypadkiem metryki (5.17) z pracy [P9].



Adam Chudecki

otrzymano jawnie metrykę samodualnej przestrzeni Einsteina-Walkera z $\Lambda = 0$.

## 5.4 Praca [P3]

Praca [P3] jest chyba najbardziej transparentnym przykładem wykorzystania formalizmu przestrzeni hiperniebiańskich jako narzędzia do rozwiązania pewnych geometrycznych problemów rozmaitości rzeczywistych. Jest ona poświęcona punktowym i globalnym przestrzeniom Ossermana i Jordana-Ossermana. W pierwszym kroku wykazaliśmy związek między takimi przestrzeniami a przestrzeniami hiperniebiańskimi. Fundamentalne twierdzenie [1] mówi, że przestrzeń jest punktową przestrzenią Ossermana wtedy i tylko wtedy, gdy jest samodualną (lub anty-samodualną) przestrzenią Einsteina, jest zatem przestrzenią typu $[\text{any}] \otimes [-]$ lub $[-] \otimes [\text{any}]$.

Główny nacisk położony został na zdegenerowane algebraicznie punktowe przestrzenie Ossermana, wyposażone w ekspandujące kongruencje strun, czyli przestrzenie typu $[\text{deg}]^e \otimes [-]^e$. Przestrzenie takie wymagały niezerowej stałej kosmologicznej[19], a ich metryki zostały znalezione jawnie (Twierdzenie 3.1). Należy wspomnieć, że był to pierwszy przypadek znalezienia jawnych metryk przestrzeni Ossermana, które nie były jednocześnie przestrzeniami Walkera. Znaleziono również metryki dla globalnych przestrzeni Ossermana, oraz punktowych i globalnych przestrzeni Jordana - Ossermana.

## 5.5 Praca [P4]

Praca [P4] poświęcona jest zespolonym, para-hermitowskim przestrzeniom Einsteina. Omawiane są w niej sposoby redukcji próżniowych równań Einsteina ze stałą kosmologiczną dla przestrzeni para-hermitowskich. Ponieważ przestrzenie para-hermitowskie wyposażone są w dwie różne kongruencje SD (lub ASD) strun zerowych, jedyne możliwe typy takich przestrzeni to $[\text{any}] \otimes [\text{D}, -]$ (orientacja została dobrana tak, że obie kongruencje strun są ASD). W każdym przypadku próżniowe równania Einsteina zostały zredukowane do pojedynczego równania. W najbardziej ogólnym przypadku przestrzeni $[\text{any}] \otimes [\text{D}]^{ee}$ z $\Lambda \neq 0$ równania pola zostały zredukowane do równania (5.13), którego analiza stała się potem fundamentem pracy [H6]. Ciekawym rezultatem jest również fakt, że jeśli para-hermitowska przestrzeń Einsteina ma jedną kongruencję ASD strun ekspandującą, a drugą nieekspandującą, to ASD część tensora Weyla musi znikać i przestrzeń automatycznie redukuje się do przestrzeni niebiańskiej typu $[\text{any}] \otimes [-]$.

## 5.6 Prace [P5], [P7]

Prace [P5] i [P7] zostały poświęcone zespolonym przestrzeniom ASD ze stałą kosmologiczną i dodatkową symetrią, definiowaną przez wektor Killinga. Problem ten w przestrzeniach rzeczywistych o sygnaturze $(++++)$ był rozpatrywany w pracach [53, 59] (w przestrzeniach takich istnieją, oczywiście, jedynie niezerowe wektory Killinga). W [53] znaleziono dwie, na pozór różne postacie wektora Killinga dopuszczanego przez przestrzenie ASD ze stałą kosmologiczną, potem w [59] dowiedziono, że te dwa wektory Killinga są w istocie tym samym obiektem. W przestrzeni rzeczywistej o sygnaturze neutralnej problem niezerowych wektorów Killinga był rozważany w [26].

Pierwszym krokiem pracy [P5] było udowodnienie, że ASD przestrzeń Einsteina ze stałą kosmologiczną dopuszcza jedynie wektory Killinga, a następnie zredukowanie równań Killinga do jednego *równania master* - jest to równanie (3.16). Równanie to jest jednak niezwykle niewygodne, zawiera bowiem całkę pierwszą równania niebiańskiego ze stałą kosmologiczną. Wielkość ta, oznaczona w pracy [P5] symbolem $\Upsilon$ wyraża się przez funkcję kluczową $W$ w tak skomplikowany sposób, że równanie master nie rościło nadziei na rozwiązanie. Na szczęście okazało się, że

[19] Przypadek przestrzeni hiperniebiańskich typu $[\text{deg}]^e \otimes [-]$ z $\Lambda = 0$ został rozwiązany w pracy [18].

 Adam Chudecki

poprzez odpowiedni dobór kongruencji SD strun zerowych funkcję $\Upsilon$ można usunąć z równania master[20].

Dobór odpowiedniej kongruencji strun zerowych SD okazał się zatem kluczowy w rozpatrywanym problemie. Dzięki wyborowi odpowiedniej kongruencji znaleziono metrykę przestrzeni niebiańskiej ze stałą kosmologiczną dopuszczającą zerowy wektor Killinga - jest to metryka (4.22). Metryka ta, rozpatrywana jako rzeczywista z sygnaturą neutralną jest zarazem ogólną metryką 4-wymiarowej globalnej przestrzeni Ossermana z niezerowym skalarem krzywizny dopuszczającą zerowy wektor Killinga[21]. Przypadek z niezerowym wektorem Killinga okazał się znacznie trudniejszy, wykazaliśmy jednak, że w takim przypadku równania pola redukują się - tak, jak w przypadku przestrzeni rzeczywistych o sygnaturach $(+++\,+)$ i $(++--)$ - do *równania Boyera-Finleya-Plebańskiego (BFP)* (zwanego również *równaniem pola Tody*).

Do tematyki niezerowych wektorów Killinga w przestrzeniach niebiańskich ze stałą kosmologiczną wróciłem w pracy [P7]. Celem było szczegółowe przeanalizowanie transformacji, która prowadzi od formalizmu przestrzeni niebiańskich zapisanych we współrzędnych PRF (metryka (2.30)) do współrzędnych zaproponowanych przez LeBruna w [29] i wykorzystywanych we wcześniejszych pracach [26, 59] (metryka (2.34)). Oprócz takiej analizy udało się odtworzyć wszystkie cięcia rzeczywiste metryki (2.34) i udowodnić twierdzenie (Twierdzenie 2.1) ogólniejsze, niż twierdzenie z pracy [P5].

## 5.7 Praca [P6]

Właściwe symetrie konforemne są symetriami rzadkimi wśród przestrzeni Einsteina w tym sensie, że w przypadku lorentzowskich przestrzeni niekonforemnie płaskich dopuszczane są jedynie przez najprostrzą z metryk opisującą typ [N] - metrykę pp-fal. W pracy [H1] rozważono przypadek zespolony dopuszczający taką symetrię, czyli przestrzeń typu $\{[\mathrm{N}]^n \otimes [\mathrm{N}]^n, [--]\}$ (jej cięciem lorentzowskim jest oczywiście pp-fala). Pośród przestrzeni niebiańskich właściwe symetrie konforemne dopuszczane są jedynie przez przestrzenie typu $[\mathrm{N}]^n \otimes [-]$. Takim symetriom poświęciliśmy pracę [P6].

Wykazaliśmy istnienie dwóch zasadniczo różnych rodzajów właściwych symetrii konforemnych w przestrzeniach typu $[\mathrm{N}]^n \otimes [-]$. Zanalizowaliśmy różnice między nimi na poziomie geometrycznym i algebraicznym. Różnica geometryczna jest silnie związana z własnościami kongruencji ASD strun zerowych. Przestrzeń typu $[\mathrm{N}]^n \otimes [-]$ jest wyposażona w nieskończoną ilość takich kongruencji, ale dwie spośród nich są wyróżnione (to kongruencje definiowane przez równania (2.18a)-(2.18b)). Jeśli obie te kongruencje są ekspandujące, mamy do czynienia z bardziej skomplikowaną klasą właściwych symetrii konforemnych (w pracy [P6] określamy taką klasę jako *Class II*). Jeśli jednak jedna z tych kongruencji jest nieekspandująca, mamy do czynienia z klasą prostrzą (*Class I*). Algebraiczna różnica jest oczywista: w przypadku symetrii należących do pierwszej klasy, równania Einsteina zostały zredukowane do równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu, które zostało rozwiązane z zachowaniem pełnej ogólności (wynikiem jest metryka (2.23) z rozwiązaniem danym przez (3.2)). Druga klasa symetrii pozwala na redukcję równań pola do równania cząstkowego drugiego rzędu (równanie (2.26) ze stałą $a_0 \neq 0$), którego ogólne rozwiązanie jest nieznane. Udało się jednak przedstawić sposób konstrukcji rozwiązania na podstawie znajomości jedynego niezerowego współczynnika krzywizny $C^{(1)}$. Jako przykład jawnej metryki dopuszczającej tego typu symetrię podano metrykę (4.10).

## 5.8 Praca [P8]

Praca [P8] zawiera głównie najważniejsze rezultaty opublikowane później w pracy [H7]. Jeden z wyników jest jednak oryginalny i bardzo ciekawy (opublikowany jest, jak na razie, tylko

[20]Ciekawym faktem jest, że przed podobnym problemem w przestrzeniach niebiańskich z $\Lambda = 0$ stanęli J.D. Finley i J.F. Plebański w pracy [17]. W pracy tej jednak udało się obejść problem wykorzystując tzw. *komplementarną kongruencję strun zerowych*. W przestrzeniach niebiańskich z $\Lambda \neq 0$ takie podejście nie działa.

[21]Ta sama metryka została znaleziona niezależnie przez M. Dunajskiego i P. Toda w [11].



Adam Chudecki

w [P8]). To ogólna metryka przestrzeni dopuszczającej dwie kongruencje nieekspandujących SD strun zerowych i jedną kongruencje nieekspandujących ASD strun zerowych (3.7). Metryka ta określa zatem przestrzeń typu $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{II}]^{n}$. Przestrzeń taka należy jednocześnie do klasy przestrzeni dwustronnie-walkerowskich i para-kählerowskich. Przypadek przestrzeni Einsteina typu $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{II}]^{n}$ również został całkowicie rozwiązany, jest to metryka (3.8), w której pojawiają się cztery dowolne funkcje dwóch zmiennych[22].

## 5.9 Podsumowanie i perspektywy

Efektem mojej pracy naukowej podjętej w 2002 roku w zespole Fizyki Teoretycznej pod kierunkiem prof. dr hab. Macieja Przanowskiego jest 17 opublikowanych prac. Trzy z tych prac ([P1] - [P3]) zostały opublikowane przed uzyskaniem przeze mnie stopnia doktora nauk fizycznych (rok 2009). W pracach opublikowanych w latach 2010-2018 zajmowałem się symetriami w przestrzeniach hiperniebiańskich, geometrią kongruencji strun zerowych, związkiem między symetriami i tą geometrią, geometrią przestrzeni wyposażonych w dwie różne kongruencje strun zerowych i metodami redukcji równań pola w przestrzeniach Einsteina.

Moje badania pozwoliły znaleźć odpowiedzi na zagadnienia nierozwiązane przez twórców teorii przestrzeni hiperniebiańskich: J.F. Plebańskiego i I. Robinsona, oraz ich współpracowników (J.D. Finleya, C.P. Boyera, S. Hacyana, M. Przanowskiego i innych). W międzyczasie natrafiłem i zdefiniowałem kilka innych problemów, którymi zamierzam zająć się w przyszłości. Najciekawsze z nich to:

- Analiza równań Einsteina dla przestrzeni hiperniebiańskiej typu $\{[\mathrm{N}]^{e} \otimes [\mathrm{N}]^{e}, [++]\}$ z jedną symetrią homotetyczną i bez żadnych symetrii (program realizowany wspólnie z prof. dr hab. M. Przanowskim).

- Jawne rozwiązania para-hermitowskich przestrzeni Einsteina typów $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{N}]^{n}$ (takie istnieją jedynie gdy $\Lambda = 0$) oraz $[\mathrm{D}]^{ee} \otimes [\mathrm{N}]^{e}$, nie udało mi się bowiem uzyskać takich przykładów w pracy [H6]. Z kolei para-kählerowska przestrzeń Einsteina typu $[\mathrm{D}]^{nn} \otimes [\mathrm{N}]^{e}$ (istnieje jedynie dla $\Lambda \neq 0$) powinna dać się rozwiązać z zachowaniem pełnej ogólności.

- Przykłady dwustronnie-walkerowskich i dwustronnie-prawie-walkerowskich przestrzeni Einsteina ze szczególnym uwzględnieniem własności kongruencji zerowych geodezyjnych powstających jako przecięcia kongruencji SD i ASD strun zerowych (praca gotowa jest w 70%).

- Subklasyfikacja kongruencji strun zerowych. Klasyfikacja kongruencji strun zerowych jest obecnie dość "uboga", rozróżniamy bowiem jedynie kongruencje ekspandujące i nieekspandujące. Powstaje pytanie, czy własności wektora Sommersa mogą zostać wykorzystane jako dodatkowe kryterium klasyfikacji kongruencji strun zerowych.

- Jawne rozwiązanie przestrzeni typu $[\mathrm{I}]^{eeee} \otimes [\mathrm{any}]$ (podejście przedstawione w [H7] jest niewątpliwie niezadowalające) i przestrzeń typu $[\mathrm{I}]^{eeee} \otimes [\mathrm{I}]^{eeee}$, w sygnaturze neutralnej i lorentzowskiej. W przypadku lorentzowskim przestrzeń taka jest przestrzenią wyposażoną w cztery różne kongruencje zerowych geodezyjnych bez ścinania. Oczywistym faktem wynikającym z twierdzenia Goldberga - Sachsa jest, że przestrzeń taka (o ile nie jest konforemnie płaska), może być jedynie algebraicznie ogólna (typ [I]) i nie może być przestrzenią Einsteina. Jakie możliwe typy bezśladowego tensora Ricciego są przez nią dopuszczane?

[22] Te dwie metryki to tylko niektóre z przykładów przestrzeni dwustronnie-walkerowskich i dwustronnie-prawie-walkerowskich (przestrzenie prawie-walkerowskie (*sesqui-Walker spaces*) zostały zdefiniowane w pracy [28]). Prace nad takimi przestrzeniami są obecnie kontynuowane i stanowią jeden z głównych nurtów moich zainteresowań naukowych.



Adam Chudecki

Istnienie kongruencji strun zerowych i formalizm przestrzeni hiperniebiańskich pozwoliły na rozwiązanie wielu zagadnień geometrycznych i zdefiniowanie wielu nowych. Najbardziej transparentne wyniki dotyczą rzeczywistych przestrzeni neutralnych, niemniej należy podkreślić, że wciąż głównym celem naszych badań są techniki znajdywania cięć lorentzowskich przestrzeni zespolonych. Mamy nadzieję, że dalsze drobiazgowe studia nad geometrią kongruencji strun zerowych i ich przecięć pozwolą na znalezienie nowych próżniowych i algebraicznie specjalnych rozwiązań równań Einsteina.

## Literatura


[1] Alekseevski D.M., Blažić N., Bokan N. and Rakić Z., *Self-dual and pointwise Osserman spaces*, Arch. Math. (Brno) **35**, 193 (1999)

[2] Blažić N., Bokan N. and Rakić Z., *Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature* $(2,2)$, J. Austr. Math. Soc. **71**, 367 (2001)

[3] Bogdanov L.V., *Dunajski-Tod equation and reductions of the generalized dispersionless 2DTL hierarchy*, Physics Letters A, Vol. 376, Issue 45 (2012)

[4] Boyer C.P., Finley J.D. and Plebański J.F., *Complex general relativity, H and HH spaces - a survey to one approach*, General Relativity and Gravitation. Einstein Memorial Volume ed. A. Held (Plenum, New York) vol.2. pp. 241-281 (1980)

[5] Chudecki A., *Plebański - Robinson - Finley hyperheavenly equations - analysis and applications in theory of relativity*, PhD thesis, Institute of Physics, Lodz University of Technology, Wólczańska 219, 90-924 Łódź, Poland (2009)

[6] Debney G.C., Kerr R.P. and Schild A., *Solutions of the Einstein and Einstein - Maxwell Equations*, J. Math. Phys. **10**, 1842 (1969)

[7] Demiański M., *New Kerr-like space-time*, Phys. Lett. **42A**, 157 (1972)

[8] Díaz - Ramos J.C., García - Río E. and Vázquez - Lorenzo R., *Four - dimensional Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators*, J. Geom. Anal. **16**, 39 (2006)

[9] Dunajski M., *Interpolating Dispersionless Integrable System*, J. Phys. A 41:315202 (2008)

[10] Dunajski M. and Tod P., *Einstein-Weyl structures from Hyper-Kähler metrics with conformal Killing vectors*, Differ. Geom. Appl. 14, 39-55 (2001)

[11] Dunajski M. and Tod P., *Self-Dual Conformal Gravity*, Communications in Mathematical Physics 331 (1), 351–373 (2014)

[12] Dunajski M. and West S., *Anti-self-dual conformal structures with null Killing vectors from projective structures*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 272, 1, pp 85–118 (2007)

[13] Finley J.D., *Toward real-valued $\mathcal{HH}$ spaces: twisting type N*, Gravitation and Geometry a volume in honour of I. Robinson, eds. W. Rindler and A. Trautman (Naples: Bibliopolis) p. 131 (1987)

[14] Finley J.D., *Equations for complex-valued twisting, type-N, vacuum solutions with one or two Killing / homothetic vectors*, arXiv: gr-gc / 0108055v1 (2001)

[15] Finley J.D. and Plebański J.F., *Further heavenly metrics and their symmetries*, J. Math. Phys. **17**, 585 (1976)




Adam Chudecki

[16] Finley J.D. and Plebański J.F., *The intrinsic spinorial structure of hyperheavens*, J. Math. Phys. **17**, 2207 (1976)

[17] Finley J.D. and Plebański J.F., *The clasification of all $\mathcal{H}$ spaces admitting a Killing vector*, J. Math. Phys. **20**, 1938 (1979)

[18] Finley J.D. and Plebański J.F., *All algebraically degenerate $\mathcal{H}$ spaces, via $\mathcal{HH}$ spaces*, J. Math. Phys. **22**, 667 (1981)

[19] Finley J.D. and Plebański J.F., *Equations for twisting, type-N, vacuum Einstein spaces without a need for Killing vectors*, J. Geom. Phys. **8**, 173 (1992)

[20] García - Río E., Kupeli D.N. and Vázquez - Lorenzo R., *Osserman Manifolds in Semi-Riemannian Geometry* Lecture Notes in Mathematics eds. J.-M. Morel, F. Takens and B. Teissier, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg (2002)

[21] García D.A. and Plebański J.F., *Seven parametric type - D solutions of Einstein - Maxwell equations in the basic left - degenerate representation*, Il Nuovo Cimento Serie 11 **40** B, 224 (1977)

[22] Rod Gover A., Denson Hill C. and Nurowski P., *Sharp version of the Goldberg-Sachs theorem*, Annali di Matematica, Vol. 190, Issue 2, pp 295–340 (2011)

[23] Hauser I., *Type - N gravitational field with twist*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1112 (1974)

[24] Hauser I., *Type - N gravitational field with twist. II*, J. Math. Phys. **19**, 661 (1978)

[25] Hall G.S., *The classification of the Ricci tensor in general relativity theory*, J. Phys. A, **9**, 541 (1976)

[26] Högner M., *Anti-self-dual fields and manifolds*, PhD thesis, University of Cambridge (2012)

[27] Law P.R. and Matsushita Y., *A spinor approach to Walker geometry*, Communications in Mathematical Physics 282, (3), 577-623 (2008)

[28] Law P.R. and Matsushita Y., *Real AlphaBeta-Geometries*, Journal of Geometry and Physics 65, 35-44 (2013)

[29] LeBrun C.R., *Explicit self-dual metrics on* $\mathbf{CP}_2\sharp...\sharp\mathbf{CP}_2$, J. Diff. Geom. **34**, 223-253 (1991)

[30] Newman E.T. and Janis A.I., *Note on the Kerr Spinning - Particle Metric*, J. Math. Phys. **6**, 915 (1965)

[31] Newman E.T., *The Bondi-Metzner-Sachs Group: Its Complexification and Some Related Curious Consequences*, Seventh International Conference on Gravitation and Relativity, Tel-Aviv (1974)

[32] Newman E.T., *Heaven and its properties*, Riddle of Gravitation Symposium, Syracuse (1975)

[33] Nurowski P. and An D., *Twistor Space for Rolling Bodies*, Communications in Mathematical Physics, 326, 2, 393-414 (2013)

[34] Nurowski P., Bor G. and Lamoneda L.H., *The dancing metric, G2-symmetry and projective rolling*, Trans. Amer. Math. Soc. **370**, 4433-4481 (2018)

[35] Nurowski P. and Bor G., *Dancing metric, 4-dimensional para-Kähler geometry and conformal SL(3,R)-holonomy*, praca wkrótce ukaże się w arXiv

 Adam Chudecki

[36] Penrose R., *A spinor approach to general relativity*, Ann. Phys. **10**, 171 (1960)

[37] Penrose R., *Twistor Algebra*, J. Math. Phys. **8**, 345 (1967)

[38] Penrose R., *Spinor classification of energy tensors*, Gravitatsiya, Nauk dumka, Kiev, p. 203 (1972)

[39] Plebański J. F., *The algebraic Structure of the tensor of matter*, Acta Physica Polonica, vol. 26, 963-1020 (1964)

[40] Plebański J.F., *Spinors, Tetrads and Forms*, unpublished monograph of Centro de Investigacion y Estudios Avanzados del IPN, Mexico 14 (1974)

[41] Plebański J.F., *Some solutions of complex Einstein equations*, J. Math. Phys. **16**, 2395 (1975)

[42] Plebański J.F. and Finley J.D., *Killing vectors in nonexpanding HH spaces*, J. Math. Phys. **19**, 760 (1978)

[43] Plebański J.F., García - Compeán H. and Garcia - Díaz A., *Real Einstein spaces constructed via linear superposition of complex gravitational fields: the concrete case of non-twisting type N solutions*, Class. Quantum Grav. **12**, 1093 (1995)

[44] Plebański J.F. and Hacyan S., *Null geodesic surfaces and Goldberg - Sachs theorem in complex Riemannian spaces*, J. Math. Phys. 16 2403 (1975)

[45] Plebański J.F., Przanowski M. and Formański S., *Linear superposition of two type-N nonlinear gravitons*, Phys. Lett. A **246**, 25 (1998)

[46] Plebański J.F. and Robinson I., *Left - degenerate vacuum metrics*, Phys. Rev. Lett. **37**, 493 (1976)

[47] Plebański J.F. and Robinson I., *The complex vacuum metric with minimally degenerated conformal curvature*, in *Asymptotic Structure of Space-Time*, eds. by F.P. Esposito and L. Witten (Plenum Publishing Corporation, New York, 1977) pp. 361-406 (1977)

[48] Plebański J.F. and Rózga K., *The optics of null strings*, J. Math. Phys., **25**, 1930 (1984)

[49] Plebański J.F. and Torres del Castillo G.F., *$\mathcal{HH}$ spaces with an algebraically degenerate right side*, J. Math. Phys. **27**, 1349 (1982)

[50] Przanowski M., *Remarks concerning the geometry of null strings*, Acta Phys. Polon., **B11** 945 (1979)

[51] Przanowski M. and Plebański J.F., *Generalized Goldberg-Sachs theorems in complex and real space-times. I.*, Acta Physica Polonica, Vol. B10 (1979)

[52] Przanowski M. and Plebański J.F., *Generalized Goldberg - Sachs theorems in complex and real space-times II*, Acta Phys. Polon. B10 573 (1979)

[53] Przanowski M., *Killing vector fields in self-dual Euclidian Einstein spaces with* $\Lambda \neq 0$, J. Math. Phys. **32**, 1004 (1991)

[54] Robinson D.C., *Some real and complex solutions of Einstein's equations*, Gen. Rel. Grav. **19**, 693 (1987)

[55] Robinson I. and Rózga K. *Congruences of null strings in complex space-times and some Cauchy-Kovalevski-like problems*, J. Math. Phys., **25**, 1941 (1984)



Adam Chudecki

[56] Rózga K., *Real slices of complex space-time in general relativity*,Rep. Math. Phys. **11**, 197 (1977)

[57] Sonnleitner A. and Finley J.D., *The form of Killing vectors in expanding $\mathcal{HH}$ spaces*, J. Math. Phys. **23(1)**, 116 (1982)

[58] Stephani H., Kramer D., MacCallum M.A.H., Hoenselaers C. and Herlt E., *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge (2003)

[59] Tod P., *A Note on Riemannian Anti-self-dual Einstein metrics with Symmetry*, arXiv:hep-th/0609071v1 (2006)

[60] Trautman A., *Analytic Solutions of Lorentz - Invariant Linear Equations*, Proc. Roy. Soc. (London) **A 270**, 326 (1962)

[61] Walker A.G., *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Quart. J. Math. Oxford (2) **1**, 69 (1950)

[62] Woodhouse N.M.J., *The real geometry of complex space-time*, Int. J. Theor. Phys. **16**, 663 (1977)



Adam Chudecki